แรงก์ของผลคูณตรงของสองกรุปสมมาตร

Rank of a Direct Product of Two Symmetric Groups

วรเชษฐ สมมะณี*

Worachead Sommanee

บทคัดย่อ

กำหนดให้ S_n เป็นกรุปสมมาตรบนเซต $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ เราทราบดีว่า แรงก์ของกรุป S_n เท่ากับ 1 ถ้า $n \leq 2$ และ S_n มีแรงก์เท่ากับ 2 เมื่อ $n \geq 3$ ให้ $X_m = \{1,2,\ldots,m\}$ และ S_m เป็นกรุปสมมาตรบน X_m ผลคูณตรง $S_m \times S_n$ เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาคที่ถูกกำหนดโดย
$(\sigma,\delta)(\sigma',\delta') = (\sigma\sigma',\delta\delta')$ สำหรับทุก $\sigma,\sigma' \in S_m$ และ $\delta,\delta' \in S_n$
ในบทความวิจัยนี้เราจะคำนวณหาแรงก์ของผลคูณตรง $S_m \times S_n$

คำสำคัญ : แรงก์ / กรุปสมมาตร

ABSTRACT

Let S_n be the symmetric group on a set $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$. It is known that the rank of the group S_n is 1 if $n \leq 2$, and the rank of S_n is equal to 2 if $n \geq 3$. Let $X_m = \{1,2,\ldots,m\}$ and S_m be the symmetric group on X_m. The direct product $S_m \times S_n$ is a group under the binary operation, given by
$(\sigma,\delta)(\sigma',\delta') = (\sigma\sigma',\delta\delta')$ for all $\sigma,\sigma' \in S_m$ and $\delta,\delta' \in S_n$.
In this study, we compute the rank of $S_m \times S_n$.

Keywords : Ranks / Symmetric groups

*อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

กรุปการเรียงสับเปลี่ยน (permutation group) หรือ กรุปสมมาตร (symmetric group) เป็นเรื่องสำคัญในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ เช่น ในทฤษฎีกาลัว (Galois theory) ทฤษฎีบทไม่แปรเปลี่ยน (invariant theory) และคณิตศาสตร์เชิงการจัด (combinatorics) เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีการศึกษาเกี่ยวกับกรุปการเรียงสับเปลี่ยนของอิเล็กตรอน (electron permutation group) ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในสาขาวิชากลศาสตร์ควอนตัม (quantum mechanics) ของฟิสิกส์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทฤษฎีกรุป (group theory) เรามีทฤษฎีบทของเคย์เลย์ (Cayley’s theorem) ที่กล่าวไว้ว่า ทุกกรุป G จะสมสัณฐาน (isomorphic) กับกรุปย่อยของกรุปการเรียงสับเปลี่ยนบนบางเซต X ที่เหมาะสม ดังนั้นหากเรารู้สมบัติต่างๆ ของกรุปการเรียงสับเปลี่ยนหรือกรุปสมมาตรมากเท่าใดก็จะยิ่งทำให้เรารู้สมบัติต่างๆ ของกรุปมากขึ้นเท่านั้น

กำหนดให้ G เป็นกรุป (group) ใดๆ *แรงก์* (rank) ของ G คือจำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดของ G ที่ซึ่งสามารถก่อกำเนิด (generate) G กำหนดโดย $\operatorname{rank}(G) = \min\{|A| : A \subseteq G$ และ $\langle A\rangle = G\}$ ให้ $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ และ S_n เป็นเซตของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก X_n ไปทั่วถึง X_n จะได้ว่า S_n เป็นกรุปภายใต้การประกอบ (composition) ของฟังก์ชัน และเรียก S_n ว่ากรุปสมมาตรบนเซต X_n (symmetric group on a set X_n) ในกรณีที่ $n \geq 3$ เราจะได้ว่า S_n สามารถก่อกำเนิดโดยใช้สมาชิกเพียง 2 ตัวเท่านั้นคือฟังก์ชัน $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ และ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ดู [1, หน้า 51] ดังนั้น $\operatorname{rank}(S_n) = 2$ เมื่อ $n \geq 3$ เราจึงเกิดปัญหาว่า อะไรคือจำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดที่สามารถก่อกำเนิดกรุป $S_m \times S_n$ เมื่อ S_m เป็นกรุปสมมาตรบน X_m นั่นคือเราจะคำนวณหา $\operatorname{rank}(S_m \times S_n)$

วิธีดำเนินการวิจัย

2.1 ศึกษา ค้นคว้างานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ว่ามีบทความวิจัยที่เรากำลังสนใจถูกตีพิมพ์แล้วหรือไม่ หรือมีงานวิจัยใดที่สามารถนำมาใช้ในงานวิจัยของเราได้บ้าง

2.2 ตั้งสมมติฐาน

2.3 ทดสอบสมมติฐานโดยการศึกษาจากตัวอย่าง

2.4 พิสูจน์สมมติฐาน

2.5 สรุปเป็นทฤษฎีบท

ความรู้พื้นฐาน

กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียกฟังก์ชัน $\sigma: X \longrightarrow X$ ว่า*การเรียงสับเปลี่ยน* (permutation) ถ้า σ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก X ไปทั่วถึง X ให้ $G(X)$ เป็นเซตของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดบนเซต X เราจะได้ว่า $G(X)$ เป็นกรุปภายใต้การประกอบของฟังก์ชัน $f \circ g$ และเรียก $G(X)$ ว่า*กรุปการเรียงสับเปลี่ยน* (permutation group) บนเซต X ในกรณีที่ $X = X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ เป็นเซตจำกัด จะเขียนแทน $G(X)$ ด้วย S_n และเรียก S_n ว่าเป็น*กรุปสมมาตรบนเซต* X_n (symmetric group on a set X_n) ซึ่งสมาชิกทั้งหมดของ S_n มีจำนวนเท่ากับ $n!$

หมายเหตุ 1. สมาชิกเอกลักษณ์ของ $G(X)$ คือฟังก์ชันเอกลักษณ์ (the identity function) และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 1_X

2. เพื่อความสะดวกเราจะเขียน fg แทน $f \circ g$

กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_r$ เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันใน X เขียน $(a_1\ a_2 \cdots\ a_r)$ แทนการเรียงสับเปลี่ยน σ ใน $G(X)$ โดยที่ $\sigma(a_1) = a_2,\ \sigma(a_2) = a_3,\ \dots\ , \sigma(a_{r-1}) = a_r,\ \ \sigma(a_r) = a_1$ และ $\sigma(a) = a$ ทุกๆ $a \in X$ ที่ซึ่ง $a \neq a_i\ (1 \leq i \leq r)$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ $X_3 = \{1,2,3\}$ แล้วสมาชิกทั้งหมดของ S_3 ประกอบไปด้วย

$$1_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2) \text{ และ } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)$$

กำหนดให้ G เป็นกรุป และ $\emptyset \neq A \subseteq G$ นิยาม

$$\langle A \rangle = \{\, a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_t^{k_t} : a_1, a_2, \dots, a_t \in A \text{ และ } k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{Z} \,\}$$

แล้ว $\langle A \rangle$ เป็น*กรุปย่อยของ* G *ที่ก่อกำเนิดโดยเซต* A (the subgroup of G generated by A) และเรียกสมาชิกใน A ว่า*ตัวก่อกำเนิด* (generators) ของกึ่งกรุปย่อย $\langle A \rangle$ ในกรณีที่ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ เป็นเซตจำกัด จะเขียน $\langle A \rangle$ แทนด้วย $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ถ้า $G = \langle A \rangle$ แล้วจะเรียก A ว่าเป็น*เซตก่อกำเนิด* (generating set) ของ G โดยทั่วไป G เป็นเซตก่อกำเนิดของ G

ตัวอย่าง 3.2 $(\mathbb{Z}, +)$ เป็นกรุป จะเห็นว่า $(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle$ เนื่องจาก สำหรับแต่ละ $a \in \mathbb{Z}$

ถ้า $a \geq 1$ เราสามารถเขียน $a = \underbrace{(1)1 + (1)1 + \cdots + (1)1}_{a \text{ ตัว}}$

ถ้า $a \leq -1$ แล้วสามารถเขียน $a = \underbrace{(-1)1 + (-1)1 + \cdots + (-1)1}_{|a| \text{ ตัว}}$

และ ถ้า $a = 0$ แล้ว $a = 0 = (0)1$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $\operatorname{rank}(\mathbb{Z}) = 1$

กำหนดให้ G และ H เป็นกรุป แล้วผลคูณตรง (direct product) ของ G และ H คือเซต $G \times H = \{(g, h) : g \in G \text{ และ } h \in H\}$ กับการดำเนินการทวิภาค (binary operation) ที่กำหนดโดย

$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$ สำหรับทุก $g, g' \in G$ และ $h, h' \in H$

จะได้ว่า $G \times H$ เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการดังกล่าว

เรามีทฤษฎีเบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับแรงก์ของผลคูณตรง ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ G และ H เป็นกรุป จะได้ว่า

$$\mathrm{rank}(G \times H) \leq \mathrm{rank}(G) + \mathrm{rank}(H)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $G = \langle A \rangle$ และ $H = \langle B \rangle$ โดยที่ $\mathrm{rank}(G) = |A|$ และ $\mathrm{rank}(H) = |B|$ เราสามารถแสดงได้โดยง่ายว่า

$$G \times H = \langle (A \times \{e_H\}) \cup (\{e_G\} \times B) \rangle$$

ที่ซึ่ง e_G และ e_H คือสมาชิกเอกลักษณ์ของ G และ H ตามลำดับ

จึงได้ว่า $\mathrm{rank}(G \times H) \leq |(A \times \{e_H\}) \cup (\{e_G\} \times B)|$

$$= |(A \times \{e_H\})| + |(\{e_G\} \times B)|$$

$$= |A| + |B|$$

$$= \mathrm{rank}(G) + \mathrm{rank}(H) \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ G และ H เป็นกรุป โดยที่ $\mathrm{rank}(G)$ และ $\mathrm{rank}(H)$ เป็นจำนวนจำกัด จะได้ว่า

$$\mathrm{rank}(G \times H) \geq \max\{\mathrm{rank}(G), \mathrm{rank}(H)\}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\mathrm{rank}(G) = k \geq \mathrm{rank}(H)$

สมมติว่า $\mathrm{rank}(G \times H) < \max\{\mathrm{rank}(G), \mathrm{rank}(H)\} = \mathrm{rank}(G) = k$

ให้ $G \times H = \langle A \times B \rangle$ โดยที่ $\mathrm{rank}(G \times H) = |A \times B|$

เนื่องจาก $|A||B| = |A \times B| < k$ จะได้ว่า $|A| < k$ และ $|B| < k$

เราสามารถแสดงได้โดยไม่ยากนักว่า $G = \langle A \rangle$

ดังนั้น $\mathrm{rank}(G) \leq |A| < k = \mathrm{rank}(G)$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $\mathrm{rank}(G \times H) \geq \max\{\mathrm{rank}(G), \mathrm{rank}(H)\}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\mathrm{rank}(G) < \mathrm{rank}(H)$ ก็จะได้ว่า

$\mathrm{rank}(G \times H) \geq \max\{\mathrm{rank}(G), \mathrm{rank}(H)\}$ เช่นกัน $\blacksquare$

บทตั้ง (lemma) ต่อไปนี้ เป็นบทตั้งที่สำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งในบทความวิจัยนี้

บทตั้ง 3.3 [1, หน้า 51] กำหนดให้ $n \geq 3$ จะได้ว่า

(1) S_n ถูกก่อกำเนิดโดย $(1\ 2)$ และ $(1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$

(2) S_n ถูกก่อกำเนิดโดย $(1\ 2)$ และ $(2\ 3\ \cdots\ n)$

ดังนั้น $\mathrm{rank}(S_n) = 2$ เมื่อ $n \geq 3$

หมายเหตุ 1. ถ้า $n = 1$ แล้วจะได้ว่า $|S_1| = 1$ ดังนั้น $\mathrm{rank}(S_1) = 1$

2. ถ้า $n = 2$ แล้ว $S_2 = \{1_X, (1\ 2)\} = \langle (1\ 2) \rangle$ จึงได้ว่า $\mathrm{rank}(S_2) = 1$

ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $X_m = \{1,2,\ldots,m\}$ และ $X_n = \{1,2,\ldots,n\}$ แล้ว

(1) $\mathrm{rank}(S_1 \times S_n) = \mathrm{rank}(S_n)$ และ $\mathrm{rank}(S_m \times S_1) = \mathrm{rank}(S_m)$

(2) ถ้า $m, n \geq 2$ แล้ว $\mathrm{rank}(S_m \times S_n) = 2$

การพิสูจน์

(1) เราจะแสดงว่า $S_1 \times S_n$ สมสัณฐาน (isomorphic) กับ S_n กำหนดให้

$\phi: S_1 \times S_n \to S_n$ โดยที่ $\phi\big((1_{X_m}, \sigma)\big) = \sigma$ สำหรับทุก $\sigma \in S_n$

เห็นได้ชัดว่า ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $S_1 \times S_n$ ไปทั่วถึง S_n กำหนดให้ $\sigma, \delta \in S_n$ จะได้ว่า

$$\phi\big((1_{X_m}, \sigma)(1_{X_m}, \delta)\big) = \phi\big((1_{X_m}, \sigma\delta)\big) = \sigma\delta = \big((1_{X_m}, \sigma)\big)\phi\big((1_{X_m}, \delta)\big)$$

ดังนั้น $S_1 \times S_n \cong S_n$ และทำให้ได้ว่า $\mathrm{rank}(S_1 \times S_n) = \mathrm{rank}(S_n)$

ในทำนองเดียวกันเราจะสามารถแสดงได้ว่า $\mathrm{rank}(S_m \times S_1) = \mathrm{rank}(S_m)$

(2) กำหนดให้ $m, n \geq 2$ โดยที่

$\sigma_m = (1\ \ 2),\ \tau_m = (1\ \ 2\ \cdots\ m),\ \delta_m = (2\ \ 3\ \cdots\ m)$ เป็นสมาชิกใน S_m

และ $\sigma_n = (1\ \ 2),\ \tau_n = (1\ \ 2\ \cdots\ n),\ \delta_n = (2\ \ 3\ \cdots\ n)$ เป็นสมาชิกใน S_n

โดยบทตั้ง 3.3 จะได้ว่า

$S_m = \langle \sigma_m, \tau_m \rangle = \langle \sigma_m, \delta_m \rangle$ และ $S_n = \langle \sigma_n, \tau_n \rangle = \langle \sigma_n, \delta_n \rangle$ สำหรับ $m, n \geq 3$

หมายเหตุ 1. $(\tau_m)^m = (\delta_m)^{m-1} = 1_{X_m}$ และ $(\tau_n)^n = (\delta_n)^{n-1} = 1_{X_n}$

2. $(\sigma_m)^k = \begin{cases} 1_{X_m} & \text{ถ้า } k \text{ เป็นเลขคู่} \\ \sigma_m & \text{ถ้า } k \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$ และ

$(\sigma_n)^k = \begin{cases} 1_{X_n} & \text{ถ้า } k \text{ เป็นเลขคู่} \\ \sigma_n & \text{ถ้า } k \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

พิจารณาแต่ละกรณีดังนี้ $m = n = 2$ หรือ $m = 2, n \geq 3$ หรือ $m \geq 3, n = 2$ หรือ $m \geq 3, n \geq 3$

<u>กรณีที่ 1</u> $m = n = 2$

เนื่องจาก $S_m = S_2 = \{1_{X_m}, \sigma_m\} = \langle \sigma_m \rangle$ และ $S_n = S_2 = \{1_{X_n}, \sigma_n\} = \langle \sigma_n \rangle$

เห็นได้ชัดว่า

$$S_m \times S_n = \{(1_{X_m},\ 1_{X_n}), (\ 1_{X_m},\ \sigma_n), (\sigma_m,\ 1_{X_n}), (\sigma_m,\ \sigma_n)\}$$

$$= \langle(\ 1_{X_m},\ \sigma_n), (\ \sigma_m,\ 1_{X_n})\rangle$$

โดยที่ $\langle(\ 1_{X_m}, 1_{X_n})\rangle = \{(\ 1_{X_m}, 1_{X_n})\} \neq S_m \times S_n$,

$\langle(1_{X_m},\ \sigma_n)\rangle = \{(1_{X_m},\ \sigma_n), (1_{X_m},\ \sigma_n)^2\} = \{(1_{X_m},\ \sigma_n), (1_{X_m}, 1_{X_n})\} \neq S_m \times S_n$,

$\langle(\sigma_m, 1_{X_n})\rangle = \{(\sigma_m, 1_{X_n}), (\sigma_m, 1_{X_n})^2\} = \{(\sigma_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, 1_{X_n})\} \neq S_m \times S_n$,

และ $\langle(\sigma_m,\ \sigma_n)\rangle = \{(\sigma_m, \sigma_n), (\sigma_m, \sigma_n)^2\} = \{(\sigma_m, \sigma_n), (1_{X_m}, 1_{X_n})\} \neq S_m \times S_n$

นั่นคือ $S_m \times S_n$ ไม่สามารถก่อกำเนิดโดยสมาชิกเพียงตัวเดียวได้ ดังนั้น $\mathrm{rank}(S_2 \times S_2) = 2$

<u>กรณีที่ 2</u> $m = 2, n \geq 3$

เนื่องจาก $S_m = S_2 = \langle\sigma_m\rangle$ และ $S_n = \langle\sigma_n, \tau_n\rangle = \langle\sigma_n, \delta_n\rangle$

เห็นได้ชัดว่า $S_2 \times S_n = \langle(\sigma_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \tau_n)\rangle$

และ $S_2 \times S_n = \langle(\sigma_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \delta_n)\rangle$

โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$\mathrm{rank}(S_2 \times S_n) \geq \max\{\mathrm{rank}(S_2), \mathrm{rank}(S_n)\} = \max\{1,2\} = 2$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\mathrm{rank}(S_2 \times S_n) \leq 2$ โดยแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณีย่อย ดังต่อไปนี้

<u>กรณีที่ 2.1</u> n เป็นจำนวนคี่

เราคาดว่า $S_2 \times S_n = \langle(1_{X_m}, \sigma_n), (\sigma_m, \tau_n)\rangle$

เนื่องจาก $(\sigma_m, \tau_n)^n = ((\sigma_m)^n, (\tau_n)^n) = (\sigma_m, 1_{X_n})$

และ $(\sigma_m, \tau_n)^{n+1} = (\sigma_m, \tau_n)^n(\sigma_m, \tau_n) = (\sigma_m, 1_{X_n})(\sigma_m, \tau_n) = (1_{X_m}, \tau_n)$

ดังนั้น $\{(\sigma_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \tau_n)\} \subseteq \langle(1_{X_m}, \sigma_n), (\sigma_m, \tau_n)\rangle$

จึงได้ว่า

$$S_2 \times S_n = \langle(\sigma_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \tau_n)\rangle \subseteq \langle(1_{X_m}, \sigma_n), (\sigma_m, \tau_n)\rangle \subseteq S_2 \times S_n$$

เพราะฉะนั้น $S_2 \times S_n = \langle(1_{X_m}, \sigma_n), (\sigma_m, \tau_n)\rangle$

กรณีที่ 2.2 n เป็นจำนวนคู่

เราคาดว่า $S_2 \times S_n = \langle (1_{X_m}, \sigma_n), (\sigma_m, \delta_n) \rangle$

เนื่องจาก $(\sigma_m, \delta_n)^{n-1} = ((\sigma_m)^{n-1}, (\delta_n)^{n-1}) = (\sigma_m, 1_{X_n})$

และ $(\sigma_m, \delta_n)^n = (\sigma_m, \delta_n)^{n-1}(\sigma_m, \delta_n) = (\sigma_m, 1_{X_n})(\sigma_m, \delta_n) = (1_{X_m}, \delta_n)$

ดังนั้น $\{(\sigma_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \delta_n)\} \subseteq \langle (1_{X_m}, \sigma_n), (\sigma_m, \delta_n) \rangle$

จึงได้ว่า

$S_2 \times S_n = \langle (\sigma_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \delta_n) \rangle \subseteq \langle (1_{X_m}, \sigma_n), (\sigma_m, \delta_n) \rangle \subseteq S_2 \times S_n$

เพราะฉะนั้น $S_2 \times S_n = \langle (1_{X_m}, \sigma_n), (\sigma_m, \delta_n) \rangle$

จากกรณีที่ 2.1 และ 2.2 เราจะได้ว่า $\mathrm{rank}(S_2 \times S_n) \leq 2$ แต่ $\mathrm{rank}(S_2 \times S_n) \geq 2$

จึงสามารถสรุปได้ว่า $\mathrm{rank}(S_2 \times S_n) = 2$

กรณีที่ 3 $m \geq 3, n = 2$

สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 2 ได้ว่า $\mathrm{rank}(S_m \times S_2) = 2$

กรณีที่ 4 $m \geq 3, n \geq 3$

เนื่องจาก $S_m = \langle \sigma_m, \tau_m \rangle = \langle \sigma_m, \delta_m \rangle$ และ $S_n = \langle \sigma_n, \tau_n \rangle = \langle \sigma_n, \delta_n \rangle$

เห็นได้ชัดว่า $S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, 1_{X_n}), (\tau_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \tau_n) \rangle \cdots (1)$

$S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, 1_{X_n}), (\tau_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \delta_n) \rangle \cdots (2)$

$S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, 1_{X_n}), (\delta_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \tau_n) \rangle \cdots (3)$

$S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, 1_{X_n}), (\delta_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \delta_n) \rangle \cdots (4)$

โดยที่ $\mathrm{rank}(S_m \times S_n) \geq \max\{\mathrm{rank}(S_m), \mathrm{rank}(S_n)\} = \max\{2,2\} = 2$

ต่อไปจะแสดงว่า $\mathrm{rank}(S_m \times S_n) \leq 2$ โดยแบ่งพิจารณาเป็น 4 กรณีย่อย ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 4.1 m และ n เป็นจำนวนคี่

เราคาดว่า $S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, \tau_n), (\tau_m, \sigma_n) \rangle$

เนื่องจาก $(\sigma_m, \tau_n)^n = ((\sigma_m)^n, (\tau_n)^n) = (\sigma_m, 1_{X_n})$,

$(\sigma_m, \tau_n)^{n+1} = (\sigma_m, \tau_n)^n(\sigma_m, \tau_n) = (\sigma_m, 1_{X_n})(\sigma_m, \tau_n) = (1_{X_m}, \tau_n)$,

$(\tau_m, \sigma_n)^m = ((\tau_m)^m, (\sigma_n)^m) = (1_{X_m}, \sigma_n)$

และ $(\tau_m, \sigma_n)^{m+1} = (\tau_m, \sigma_n)^m(\tau_m, \sigma_n) = (1_{X_m}, \sigma_n)(\tau_m, \sigma_n) = (\tau_m, 1_{X_n})$

ดังนั้น $\{(\sigma_m, 1_{X_n}), (\tau_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \tau_n)\} \subseteq \langle (\sigma_m, \tau_n), (\tau_m, \sigma_n) \rangle$

โดยใช้สมการ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_m \times S_n &= \langle (\sigma_m, 1_{X_n}), (\tau_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \tau_n) \rangle \\ &\subseteq \langle (\sigma_m, \tau_n), (\tau_m, \sigma_n) \rangle \\ &\subseteq S_m \times S_n \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, \tau_n), (\tau_m, \sigma_n) \rangle$

<u>กรณีที่ 4.2</u> m เป็นจำนวนคี่ และ n เป็นจำนวนคู่

เราคาดว่า $S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, \delta_n), (\tau_m, \sigma_n) \rangle$

เนื่องจาก $(\sigma_m, \delta_n)^{n-1} = ((\sigma_m)^{n-1}, (\delta_n)^{n-1}) = (\sigma_m, 1_{X_n})$,

$(\sigma_m, \delta_n)^{n} = (\sigma_m, \delta_n)^{n-1}(\sigma_m, \delta_n) = (\sigma_m, 1_{X_n})(\sigma_m, \delta_n) = (1_{X_m}, \delta_n)$,

$(\tau_m, \sigma_n)^{m} = (1_{X_m}, \sigma_n)$ และ $(\tau_m, \sigma_n)^{m+1} = (\tau_m, 1_{X_n})$

ดังนั้น $\{(\sigma_m, 1_{X_n}), (\tau_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \delta_n)\} \subseteq \langle (\sigma_m, \delta_n), (\tau_m, \sigma_n) \rangle$

โดยใช้สมการ (2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_m \times S_n &= \langle (\sigma_m, 1_{X_n}), (\tau_m, 1_{X_n}), (1_{X_m}, \sigma_n), (1_{X_m}, \delta_n) \rangle \\ &\subseteq \langle (\sigma_m, \delta_n), (\tau_m, \sigma_n) \rangle \\ &\subseteq S_m \times S_n \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, \delta_n), (\tau_m, \sigma_n) \rangle$

<u>กรณีที่ 4.3</u> m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่

โดยใช้สมการ (3) เราจะสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 4.2 ได้ว่า

$$S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, \tau_n), (\delta_m, \sigma_n) \rangle$$

<u>กรณีที่ 4.4</u> m และ n เป็นจำนวนคู่

โดยใช้สมการ (4) เราจะสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 4.1 ได้ว่า

$$S_m \times S_n = \langle (\sigma_m, \delta_n), (\delta_m, \sigma_n) \rangle$$

จากกรณีที่ 4.1 – 4.4 เราจะได้ว่า $\mathrm{rank}(S_m \times S_n) \leq 2$ แต่ $\mathrm{rank}(S_m \times S_n) \geq 2$ จึงสามารถสรุปได้ว่า $\mathrm{rank}(S_m \times S_n) = 2$ ■

อภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้เราหาได้เพียงแรงก์ของผลคูณตรงของสองกรุปสมมาตร เท่านั้น สำหรับผู้ที่มีความสนใจสามารถขยายแนวคิดนี้เพื่อหา $\mathrm{rank}\left(S_{n_1} \times S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_k}\right)$ เมื่อ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ที่ให้การสนับสนุนในการทำงานวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Hungerford, T. W. (1974). **Algebra**. Springer-Verlag, New York : Additional Links.