ปีที่ 11 ฉบับที่ 2 กรกฎาคม-ธันวาคม 2567 ISSN 2985-2161 (Online)

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y=z^2$ และ $11^x+89^y=z^2$

Solutions of the Diophantine equations $3^x+97^y=z^2$ and $11^x+89^y=z^2$

โกมล ไพศาล*

Komon Paisal

ไพลิน ชญาภัม*

Pailin Chayapham

วิชาญ เลิศลพ**

Wichan Lertlop

Received : November 28, 2023

Revised : February 23, 2024

Accepted : July 17, 2024

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยนี้ผู้วิจัยได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y = z^2$ และ $11^x+89^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ คือ (x, y, z) คือ {(1, 0, 2), (1, 1, 10)} และ {(1, 1, 10)} ตามลำดับ

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ / ผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มลบ

ABSTRACT

In this article, we prove that the solutions of the Diophantine equations $3^x + 97^y = z^2$ and $11^x + 89^y = z^2$, where x, y and z are non – negative integers, are {(1, 0, 2), (1, 1, 10)} and {(1, 1, 10)}, respectively.

Keywords : Diophantine equation / Non-negative integer solutions

*อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Informatics Mathematics Program, Faculty of science and technology, Suan Sunandha Rajabhat University(Corresponding Author) e-mail: komon.pa@ssru.ac.th

**อาจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Physics Program, Faculty of science and technology, Suan Sunandha Rajabhat University

Vol.11 No.2 July-December 2024 ISSN 2985-2161 (Online)

บทนำ

นักวิจัยหลายท่านได้ให้ความสนใจในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบต่างๆ อาทิเช่น Sroysang (2014) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $143^x+145^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) คือ (1,0,12) เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ Robago (2016) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x+17^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) คือ (3, 1, 5), (5, 1, 7), (6, 1, 9), (7, 3, 71) และ (9, 1, 23) เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ Aggarwal, Sharma and Singhal (2020) แสดงได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $223^x + 241^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ จะไม่มีผลเฉลย และ Burshtein (2021) กล่าวว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^4+q^y = z^4$ และ $p^4-q^y = z^4$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกันจะไม่มีผลเฉลย นอกจากนั้น Aggarwal and Kumar (2021) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูปแบบ $(2^{2m+1}-1)+(6r+1)^n = z^2$ เมื่อ m, n, r และz ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ ก็ไม่มีผลเฉลยเช่นเดียวกัน จากการทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่ายังไม่มีนักวิจัยได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $p^2+q^2 = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง p+q = 100 ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษารูปแบบสมการดังกล่าว แต่ในบทความนี้ขอนำเสนอเพียง 2 สมการ ดังนี้ สมการแรกเพื่อพิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) คือ (1, 0, 2) และ (1, 1, 10) เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ และสมการที่สองเพื่อพิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+89^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) คือ (1, 1, 10) เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ ส่วนสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y = z^2$

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยนี้เริ่มต้นจากการศึกษาแนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องประกอบด้วยบทตั้ง ดังนี้

บทตั้งที่ 1 ข้อคาดการณ์ของคาร์ทาลาน (Catalan) กล่าวว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จะมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น คือ (a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)

พิสูจน์ ข้อคาดการณ์นี้ได้รับการพิสูจน์ โดย Paul Mihailescu (2004)

บทตั้งที่ 2 สมการไดโอแฟนไทน์ $1+97^y = z^2$ เมื่อ y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ จะไม่มีผลเฉลย

พิสูจน์ (การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง) สมมติว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $1+97^y = z^2$ ซึ่ง y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ เมื่อจัดรูปสมการใหม่เป็น $z^2 – 97^2 = 1$ โดยบทตั้งที่ 1 ซึ่งกล่าวมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว จึงเกิดข้อขัดแย้ง

บทตั้งที่ 3 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x +1 = z^2$ เมื่อ x และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ มีผลเฉลยคือ (x, z) = (1, 2)

พิสูจน์ จากสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x +1 = z^2$ เมื่อ x และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ ถ้า x = 0 จะได้ว่า $z^2 = 2$ และถ้า z = 0 จะได้ $3^x = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น จึงพิจารณา กรณีที่ $x \geq 1$ และ $z \geq 1$ ซึ่ง ถ้า x = 1 จะได้ z = 2 ทำให้ได้ว่า (x, z) = (1, 2) เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x +1 = z^2$ แต่ถ้า x >1 ทำให้ z ≥ 3 จากบทตั้งที่ 1 ทำให้ทราบว่าค่า x และ z ดังกล่าวจะไม่เป็นผลเฉลยของ $3^x +1 = z^2$ ดังนั้น สรุปได้ว่า สมการไดโอ แฟนไทน์ $3^x +1 = z^2$ มีผลเฉลยคือ (x, z) = (1, 2)

ปีที่ 11 ฉบับที่ 2 กรกฎาคม-ธันวาคม 2567 ISSN 2985-2161 (Online)

บทตั้งที่ 4 สมการไดโอแฟนไทน์ $1+89^y = z^2$ เมื่อ y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ จะไม่มีผลเฉลย

พิสูจน์ (การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง) สมมติว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $1+89^y = z^2$ ซึ่ง y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ เมื่อจัดรูปสมการใหม่เป็น $z^2 – 89^2 = 1$ โดยบทตั้งที่ 1 ซึ่งกล่าวมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว จึงเกิดข้อขัดแย้ง

บทตั้งที่ 5 สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+1 = z^2$ เมื่อ x และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ จะไม่มีผลเฉลย

พิสูจน์ (การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง) สมมติว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+1 = z^2$ ซึ่ง x และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ เมื่อจัดรูปสมการใหม่เป็น $z^2 – 11^x = 1$ โดยบทตั้งที่ 1 ซึ่งกล่าวมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ผลการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้แบ่งการวิจัยออกเป็นทฤษฎีบท 2 บท ดังได้กล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ มีผลเฉลย คือ (x, y, z) = (1, 0, 2) และ (1, 1, 10)

พิสูจน์ กำหนดให้ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ และพิจารณากรณีจำนวนใดจำนวนหนึ่งในสามจำนวนนั้น ก็คือ x, y และ z เป็นศูนย์ นั่นคือจากสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y = z^2$ กรณีที่ z = 0 เห็นได้ชัดเจนว่าเป็นไปไม่ได้ และกรณีที่ x = 0 โดยบทตั้งที่ 2 ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย ถ้า y = 0 โดยบทตั้งที่ 3 สรุปได้ว่า (x, y, z) = (1, 0, 2) เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y = z^2$ จึงเป็นการเพียงพอที่จะพิจารณาผลเฉลย เมื่อ $x \geq 1$, $y \geq 1$ และ $z \geq 1$ เนื่องจาก 3^x+97^y เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น z^2 เป็นจำนวนคู่ด้วย จึงได้ว่า z เป็นจำนวนคู่ กำหนดให้ z = 2k สำหรับ k บางตัวที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0 \ (mod 4)$ และ $97^y \equiv 1 \ (mod 4)$ เป็นผลทำให้ได้ $3^x \equiv 3 \ (mod 4)$ ดังนั้น x เป็นจำนวนคี่ กำหนดให้ x = 2m+1 สำหรับ m บางตัวที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ ต่อไปจึงได้พิจารณา y ออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ y เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง y = 2t สำหรับ t บางตัวที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ จาก $3^x+97^y = z^2$ จะเขียนได้ในรูป $z^2 – 97^{2t} = 3^x$ กำหนดให้ x = u+v และ โดยการไม่สูญเสียนัยทั่วไป ให้ u > v จะได้ว่า $(z - 97^t)(z +97^t) = 3^{u+v}$ ผลที่ตามมา $2(97^t) =3^u - 3^v = 3^v (3^{u - v} - 1)$ เมื่อ $v \neq 0$ เป็นไปไม่ได้ เพราะว่า ด้านซ้ายของสมการไม่มี 3 เป็นตัวประกอบ จึงเหลือกรณี เมื่อ v = 0 ทำให้ $2(97^t) = 3^x -1$ แต่ $2(97^t) – 2 = 3^x -1-2$ จะได้ว่า $2(97^t - 1) = 3(3^{x - 1} - 1)$ ทำให้ $3^{x - 1} - 1 = 2$ และ $97^t - 1 = 3$ ดังนั้น x = 2 เกิดข้อขัดแย้งที่ว่า x เป็นจำนวนคี่

กรณีที่ 2 กำหนดให้ y เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง y = 2t+1 สำหรับ t บางตัวที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ จาก $3^x+97^y = z^2$ จะเขียนได้ในรูป $3^{2m+1}+97^{2t+1} = (2k)^2$ ดังนั้น $3(3^{2m})+97(97^{2t}) = 4k^2$ จะได้ว่า $3(3^{2m})+48(97^{2t}) = 4k^2 – 49(97^{2t})$ ดังนั้น $3(3^{2m} + 16(97^{2t})) = (2k – 7(97^t)) (2k + 7(97^t))$ ผลที่ตามมา $2k – 7(97^t) = 3$ และ $2k + 7(97^t) = 3^{2m} + 16(97^{2t})$ ซึ่งเป็นไปได้เมื่อ t = 0 , k = 5 และ m = 0 ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+97^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มเป็นลบ มีผลเฉลยคือ (x, y, z) = (1, 1, 10)

Vol.11 No.2 July-December 2024 ISSN 2985-2161 (Online)

ทฤษฎีบทที่ 2 สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+89^y = z^2$ เมื่อ x,y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มเป็นลบ มีผลเฉลยคือ (x,y,z) = (1,1,10)

พิสูจน์ กำหนดให้ x,y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มเป็นลบ และพิจารณากรณีจำนวนใดจำนวนหนึ่งในสามจำนวนนั้น ก็คือ x,y และ z เป็นศูนย์ นั่นคือ จากสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+89^y = z^2$ กรณีที่ z = 0 เห็นได้ชัดเจนว่าเป็นไปไม่ได้ และกรณีที่ x = 0 โดยบทตั้งที่ 4 ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+89^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย ถ้า y = 0 โดย บทตั้งที่ 5 สรุปได้สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+89^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย จึงเป็นการเพียงพอที่จะพิจารณาผลเฉลย เมื่อ x, y และ z ≥ 1 เนื่องจาก 11^x+89^y เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น z^2 เป็นจำนวนคู่ด้วย จึงได้ว่า z เป็นจำนวนคู่ กำหนดให้ z = 2k สำหรับ k บางตัวที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ เนื่องจาก เนื่องจาก $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ และ $89^y \equiv 1 \pmod{4}$ เป็นผลทำให้ได้ $11^x \equiv 3 \pmod{4}$ ดังนั้น x เป็นจำนวนคี่ กำหนดให้ x = 2m+1 สำหรับ m บางตัวที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ ต่อไปจึงได้พิจารณา y ออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ y เป็นจำนวนคู่ ซึ่ง y = 2t สำหรับ t บางตัวที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ จาก $11^x+89^y = z^2$ จะเขียนได้ในรูป $z^2 - 89^{2t} = 11^x$ กำหนดให้ x = u+v และ โดยการไม่สูญเสียนัยทั่วไป ให้ u > v จะได้ว่า $(z - 89^t)(z+89^t) = 11^{u+v}$ ผลที่ตามมา $2(89^t) =11^u - 11^v = 11^v(11^{u-v} - 1)$ เมื่อ $v \neq 0$ เป็นไปไม่ได้ เพราะว่าด้านซ้ายของสมการไม่มี11เป็นตัวประกอบจึงเหลือกรณีเมื่อ v = 0 ทำให้ $2(89^t) = 11^x - 1=11^{2m+1} - 1$ แต่ $2(89^t) \equiv 2 \pmod{5}$ หรือ $2(89^t) \equiv 3 \pmod{5}$ และ $11^{2m+1} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ ซึ่งขัดแย้งกัน ดังนั้น $11^x+89^y = z^2$ จึงไม่มีผลเฉลย เมื่อ y เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 กำหนดให้ y เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง y = 2t+1 สำหรับ t บางตัวที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ จาก $11^x+89^y = z^2$ จะเขียนได้ในรูป $11^{2m+1}+89^{2t+1} = (2k)^2$ ดังนั้น $11(11^{2m})+89(89^{2t}) = 4k^2$ ผลที่ตามมา $11(11^{2m})+88(89^{2t}) = 4k^2-1(89^{2t})$ ดังนั้น $11(11^{2m}+8(89^{2t})) = (2k+89^t)(2k-89^t)$ ผลที่ตามมา $2k+89^t = 11$ และ $11^{2m}+8(89)^{2t} = 2k-89^t$ ซึ่งเป็นไปได้เมื่อ t = 0, k = 5 และ m = 0 ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x+89^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ มีผลเฉลยคือ (x, y, z) = (1, 1, 10)

อภิปรายผลการวิจัย

สมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $p^x+q^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ จะมีผลเฉลยหรือไม่มีผลเฉลยที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบก็ได้ขึ้นอยู่ค่าของ p และ q เช่น $2^x+2^y = z^2$ มีผลเฉลย ได้แก่ (0, 3, 3), (1, 1, 2), (2, 5, 6), (3, 0, 3), (3, 3, 4), (4, 7, 12), (5, 2, 6), (5, 5, 8), (6, 9, 24), (7, 4, 12), (7, 7, 16), (8, 11, 48), (9, 6, 24), (9, 9, 32), (10, 13, 96), (11, 8, 48), (11, 11, 64) และ (13, 10, 96) แต่สมการ $223^x+241^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ ส่วนรูปแบบ $p^x+q^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง p+q = 100 ที่เหลือ ได้แก่ $17^x+83^y = z^2$, $29^x+71^y = z^2$, $41^x+59^y = z^2$ และ $47^x+53^y = z^2$ ซึ่งมีผลเฉลยเหมือนกัน คือ (x, y, z) = (1, 1, 10) ไม่ได้นำเสนอในบทความนี้ เนื่องจากผู้วิจัยได้ทำแล้ว

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา ที่สนับสนุนและให้โอกาสในการทำวิจัยครั้งนี้

References

Aggarwal, S., Sharma, S.D. & Singhal, H. (2020, August). On the Diophantine equation $223^x+241^y = z^2$. **International Journal of Research and Innovation in Applied Science, 5**(8), 155-156.

Aggarwal, S. & Kumar, S. (2021). On the exponential Diophantine equations $(2^{2m+1}-1)+(6r + 1)^n = z^2$. **International Journal of Research and Innovation in Applied Science, 4**(6), 49-51.

Burshtien, N. (2021, January). All the solutions of the Diophantine equations $p^4+q^y = z^4$ and $p^4-q^4 = z^4$ when p,q are distinct primes. **Annal of Pure and Applied Mathematics, 23**(1), 17-20.

Mihailescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 572**, 167-195.

Rabago, J.F.T. (2016). On the Diophantine equation $2^x+17^y = z^2$. **Journal of the Indonesian Mathematical Society, 22**(2), 85-88.

Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $143^x+145^y = z^2$. **International Journal of pure and applied Mathematics, 91**(2), 265-268.