ผลเฉลยที่เป็นบวกและผลเฉลยที่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร
Positive and negative solutions of linear Diophantine equations with two variables

บูรพา สิงหา*
Boorapa Singha

Received : November 22, 2018
Revised : June 21, 2019
Accepted : August 27, 2019

บทคัดย่อ

ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มโดยที่ a และ b ไม่เป็นศูนย์ จะเรียกสมการในรูป $ax+by=c$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรของจำนวนเต็มว่าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่า สมการไดโอแฟนไทน์นี้จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อตัวหารร่วมมากของ a และ b หาร c ลงตัว แต่อย่างไรก็ตามยังไม่เคยมีการแสดงให้เห็นเงื่อนไขที่ชัดเจนที่จะทำให้สมการมีผลเฉลยที่เป็นบวกและผลเฉลยที่เป็นลบ ในงานวิจัยนี้จะแสดงเงื่อนไขที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร มีผลเฉลยที่เป็นบวกและมีผลเฉลยที่เป็นลบ

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ / ตัวหารร่วมมาก

ABSTRACT

Let a,b and c be integers where a and b are nonzero integers, we call $ax+by=c$ a linear Diophantine equation with two variables. It is known that the equation has a solution if and only if c can be divided by the greatest common divisor of a and b. In this research, we give a condition for the existence of positive solutions and negative solutions of the equations.

Keywords : Diophantine Equation / Greatest Common Divisor

*อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่
Lecturer at the Department of Mathematics and Statistics Faculty of Science and Technology Chiang Mai Rajabhat University

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์คือสมการที่อยู่ในรูป $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปร โดยที่ $n \geq 2$ เช่น ถ้า $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ จะได้ $x^2 + y^2 = z^2$ เป็นสมการไดโอแฟนไทน์สามตัวแปร โดยสมการนี้มีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าสมการพีทาโกรัส (Pythagoras equation)

ในกรณีที่เลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวมีค่าเท่ากับหนึ่ง เราจะเรียกสมการนั้นว่าสมการไดโอแฟนไทน์ เชิงเส้น (linear Diophantine equation) การศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ชนิดต่างๆนั้นมีมาอย่างแพร่หลาย ในปี 2008 Khorramizadeh และ Mahdavi-Amiri ได้ศึกษาการหาผลเฉลยของระบบสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นโดยใช้รูปแบบทั่วไปของขั้นตอนวิธีของรอสเซอร์ (Rosser’s algorithm) (Khorramizadeh & Mahdavi-Amiri, 2008) ต่อมาในปี 2014 Costica ได้สรุปรูปแบบของสมการไดโอแฟนไทน์ชนิดต่างๆรวมถึงแสดงผลลัพธ์เกี่ยวกับผลเฉลยของสมการเหล่านั้น เช่น รูปแบบหนึ่งของผลเฉลยของสมการ $x^2 + y^2 = z^2$ อยู่ในรูป $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ และ $z = m^2 + n^2$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนนับ (Costica, 2014) นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยอื่นๆที่ได้ศึกษาถึงขั้นตอนวิธีในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นให้รวดเร็วขึ้น เช่นใน (Eisenbeis, Temam & Wijshoff, 1992) และ (Filgueiras & Tomas, 1993) เป็นต้น

ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มและ x, y เป็นตัวแปรของจำนวนเต็ม จะเรียกสมการในรูป $ax + by = c$ ว่าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร ซึ่งเป็นสมการที่เชื่อมโยงได้ในชีวิตประจำวัน เช่น ต้องการแลกธนบัตรฉบับละ 100 บาท เป็นเหรียญ 5 บาทและเหรียญ 10 บาท จะได้อย่างละกี่เหรียญและแลกได้ทั้งหมดกี่วิธี โดยปัญหานี้สามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ $5x + 10y = 100$ โดยที่ x และ y คือจำนวนเหรียญ 5 บาทและเหรียญ 10 บาท ที่แลกได้ตามลำดับ ในงานวิจัยที่ผ่านมามีการพิสูจน์ให้เห็นว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $ax + by = c$ จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อตัวหารร่วมมากของ a และ b หาร c ลงตัว ยิ่งกว่านั้น ถ้าเราทราบผลเฉลยเฉพาะ (x_0, y_0) ของสมการแล้ว ผลเฉลยทั่วไปจะอยู่ในรูป

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \quad \text{และ} \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

เมื่อ $t \in \mathbf{Z}$ และ d เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b ในการตรวจสอบว่าสมการจะมีผลเฉลย x และ y ที่เป็นบวกนั้น จะทำโดยแก้สมการทั้งสองข้างต้นเพื่อหาค่า t ที่ทำให้ $x > 0$ และ $y > 0$ โดยสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวกก็ต่อเมื่อสามารถหาค่า t ดังกล่าวได้ ซึ่งจากงานวิจัยที่ผ่านมานั้น ยังไม่พบว่ามีการแสดงให้เห็นเงื่อนไขที่ชัดเจนที่ใช้สำหรับตรวจสอบการมีผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปรในรูปแบบทั่วไป

ในงานวิจัยนี้ เราใช้ผลลัพธ์ข้างต้นเป็นแนวคิดหลัก ประกอบกับความรู้เกี่ยวกับตัวหารร่วมมากเพื่อแสดงเงื่อนไขที่จะทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร $ax + by = c$ ใดๆ มีผลเฉลยที่เป็นบวก จากนั้นจะขยายผลต่อเพื่อแสดงเงื่อนไขการมีผลเฉลยที่เป็นลบของสมการ โดยเราจะศึกษาเฉพาะในกรณีที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ เท่านั้น เนื่องจากเห็นได้ชัดว่า ถ้า $a = 0$ แล้วสมการจะอยู่ในรูป $by = c$ นั่นคือ $y = \frac{c}{b}$ ทำให้ได้ว่าผลเฉลยของสมการจะอยู่ในรูปคู่อันดับ $(x, \frac{c}{b})$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มใดๆ ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $b = 0$ ผลเฉลยของสมการจะอยู่ในรูปคู่อันดับ $(\frac{c}{a}, y)$ เมื่อ y เป็นจำนวนเต็มใดๆ

วิธีดำเนินการวิจัย

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปรและความรู้อื่นๆที่สำคัญที่จะนำมาใช้อ้างอิงในงานวิจัยนี้ โดยต่อไปนี้สัญลักษณ์ $d \mid c$ จะหมายถึง d หาร c ลงตัว ส่วนสัญลักษณ์ $d=(a,b)$ จะหมายถึง d เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b นอกจากนี้การเขียนสัญลักษณ์ (a,b) อาจหมายถึงช่วงเปิด หรือคู่อันดับตามแต่บริบทที่เหมาะสมของข้อความนั้นๆ

ทฤษฎีบทที่ 1 (Burton, 2006, p. 21) *ถ้า $d=(a,b)$ แล้ว d สามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นของ a และ b ได้ นั่นคือ จะมีจำนวนเต็ม m และ n โดยที่ $d=an+bm$*

ค่า m และ n จากทฤษฎีบทที่ 1 นั้นอาจมีหลายชุด เช่น $2=(4,6)$ จะเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นได้ว่า $2=4(-1)+6(1)$ หรือ $2=4(-4)+6(3)$ เป็นต้น

ทฤษฎีบทที่ 2 และ 3 ต่อไปนี้ เป็นที่ทราบกันอย่างแพร่หลายในการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ ซึ่งแสดงให้เห็นเงื่อนไขการมีผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร

ทฤษฎีบทที่ 2 (Burton, 2006, p. 33) *ให้ a,b,c เป็นจำนวนเต็ม และ $a,b\neq 0$ สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax+by=c$ จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $d \mid c$ เมื่อ $d=(a,b)$*

ทฤษฎีบทที่ 3 (Burton, 2006, p. 34) *ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $ax+by=c$ มี $x=x_0$ และ $y=y_0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะแล้ว ทุกผลเฉลยของสมการหรือเรียกว่าผลเฉลยทั่วไปจะอยู่ในรูป*

$$x=x_0+\frac{b}{d}t \text{ และ } y=y_0-\frac{a}{d}t \quad \text{เมื่อ } t\in\mathbf{Z} \text{ และ } d=(a,b)$$

จากผลลัพธ์ข้างต้นเราสามารถเขียนผลเฉลยทั่วไปอีกรูปแบบหนึ่งของสมการได้ดังต่อไปนี้

บทตั้งที่ 1 *ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปรมีผลเฉลยแล้ว ผลเฉลยทั่วไปรูปแบบหนึ่งจะอยู่ในรูป*

$$x=\frac{nc+bt}{d} \text{ และ } y=\frac{mc-at}{d}$$

เมื่อ $d=(a,b)$ และ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่เกิดจากผลรวมเชิงเส้น $d=an+bm$

การพิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 1 และทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า $d \mid c$ เมื่อ $d=(a,b)$ แล้ว จะมีจำนวนเต็ม m และ n โดยที่ $an+bm=d$ จะได้ $an\cdot\frac{c}{d}+bm\cdot\frac{c}{d}=d\cdot\frac{c}{d}$ และได้ว่า $a(\frac{nc}{d})+b(\frac{mc}{d})=c$ เมื่อ $\frac{nc}{d},\frac{mc}{d}\in\mathbf{Z}$ ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะชุดหนึ่งของสมการคือ $x_0=\frac{nc}{d}, y_0=\frac{mc}{d}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 3 ทำให้ได้ผลเฉลยทั่วไปในรูป $x=\frac{nc}{d}+\frac{b}{d}t=\frac{nc+bt}{d}$ และ $y=\frac{mc}{d}-\frac{a}{d}t=\frac{mc-at}{d}$ □

บทตั้งที่ 2 *ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $b-a\leq 1$ ถ้ามีจำนวนเต็มในช่วงเปิด (a,b) แล้ว จะมีจำนวนเต็มอยู่ในช่วงเปิดนี้เพียงจำนวนเดียว*

การพิสูจน์ ให้ $b-a\leq 1$ และสมมติมี $p,q\in\mathbf{Z}$ โดยที่ $p,q\in(a,b)$ และ $p\neq q$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $p<q$ ดังนั้นจะได้ $1\leq q-p$ ต่อมา จาก $p,q\in(a,b)$ จะได้ $a<p<q<b$ ดังนั้น $q+a<b+p$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $1\leq q-p<b-a$ เกิดการขัดแย้งกับสมมติฐาน $b-a\leq 1$

เพราะฉะนั้น ถ้ามีจำนวนเต็มในช่วงเปิด (a,b) แล้วจะมีจำนวนเต็มในช่วงเปิด (a,b) เพียงจำนวนเดียว □

ผลการวิจัย

ในส่วนนี้จะนำเสนอผลจากการวิจัยที่แสดงให้เห็นเงื่อนไขที่จะทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ เชิงเส้นสองตัวแปรมีผลเฉลยที่เป็นบวกซึ่งจะแสดงในทฤษฎีบทที่ 4 และต่อจากนั้นจะขยายผลเพื่อแสดงเงื่อนไขที่ทำให้สมการมีผลเฉลยที่เป็นลบโดยจะแสดงในบทแทรกที่ 1 ในกระบวนการพิสูจน์นั้น กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a,b>0$ จะได้สมการไดโอแฟนไทน์ทั้งหมด 4 กรณีแบ่งตามค่าสัมประสิทธิ์ของ x และ y ดังนี้ $ax+by=c$, $ax-by=c$, $-ax+by=c$ และ $-ax-by=c$ ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อคูณสมการที่สามด้วย -1 แล้วจะสามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการที่สองเป็น $ax-by=-c$ ในทำนองเดียวกันสมการที่สี่สามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการหนึ่งเป็น $ax+by=-c$ ดังนั้นในการพิสูจน์ทั้งหมดต่อไปนี้ เราจะพิจารณาเฉพาะสมการรูปแบบที่หนึ่งและสองเท่านั้น นอกจากนี้เมื่อกล่าวถึงจำนวนเต็ม m และ n จะหมายถึงจำนวนเต็มที่เกิดจากการเขียนผลรวมเชิงเส้น $d=an+bm$ ตามทฤษฎีบทที่ 1 เมื่อ $(a,b)=d$ และสำหรับแต่ละจำนวนจริง x จะใช้สัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ แทนฟังก์ชันเพดาน (ceiling function) ของ x ซึ่งหมายถึงจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x

ทฤษฎีบทที่ 4 *ให้* a,b *และ* c *เป็นจำนวนเต็มโดยที่* $a,b>0$ *และ* $d\,|\,c$ การมีผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร เป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) สมการ $ax+by=c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกก็ต่อเมื่อ

$$\frac{dc}{ab}>1 \text{ หรือ} \left(\frac{dc}{ab}\le 1 \text{ และ } -\frac{nc}{b}\notin \mathbf{Z} \text{ และ } \left\lceil -\frac{nc}{b}\right\rceil < \frac{mc}{a}\right)$$

โดยในกรณีนี้ผลเฉลยที่เป็นบวกทั้งหมดจะอยู่ในรูป

$$x=\frac{nc+bt}{d} \text{ และ } y=\frac{mc-at}{d} \text{ เมื่อ } t\in \mathbf{Z} \text{ และ } -\frac{nc}{b}<t<\frac{mc}{a} \text{ ซึ่งมีจำนวนจำกัด}$$

(ii) สมการ $ax-by=c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์ชุด ในรูป

$$x=\frac{nc+bt}{d} \text{ และ } y=\frac{mc-at}{d} \text{ เมื่อ } t\in \mathbf{Z} \text{ และ } t<\min\left\{\frac{nc}{b},\frac{mc}{a}\right\}$$

การพิสูจน์ (i) $(\Rightarrow)$ ให้สมการ $ax+by=c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก โดยบทตั้งที่ 1 จะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$x=\frac{nc+bt}{d} \text{ และ } y=\frac{mc-at}{d} \quad \text{เมื่อ } t\in \mathbf{Z}$$

และจะมีค่า $t_0\in \mathbf{Z}$ ที่ทำให้

$$\frac{nc+bt_0}{d}>0 \text{ และ } \frac{mc-at_0}{d}>0$$

โดยการแก้อสมการทั้งสอง จะได้ว่า $-\frac{nc}{b}<t_0<\frac{mc}{a}$

จากนั้นพิจารณาผลต่างของ $\frac{mc}{a}$ และ $-\frac{nc}{b}$ ซึ่งเป็นไปได้ 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $\frac{mc}{a}-\left(-\frac{nc}{b}\right)>1$ ในกรณีนี้ จาก $d=an+bm$ จะได้ $\frac{d}{ab}=\frac{n}{b}+\frac{m}{a}$ ดังนั้น

$$\frac{dc}{ab}=\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)c=\frac{mc}{a}-\left(-\frac{nc}{b}\right)>1$$

กรณีที่ 2 $\frac{mc}{a}-\left(-\frac{nc}{b}\right)\le 1$ ในทำนองเดียวกันกับกรณี 1 สามารถแสดงได้ว่า $\frac{dc}{ab}\le 1$

ต่อมาสมมติ $\frac{mc}{a}-\left(-\frac{nc}{b}\right)=r$ เมื่อ $0<r\le 1$ จะได้ $\frac{mc}{a}=-\frac{nc}{b}+r$

ในกรณีนี้ ถ้า $-\frac{nc}{b}\in\mathbf{Z}$ แล้ว จำนวนเต็มตัวถัดไปคือ $-\frac{nc}{b}+1$ จึงไม่มีจำนวนเต็มใดๆอยู่ในช่วงเปิด $(-\frac{nc}{b},-\frac{nc}{b}+1)$ ต่อมา จาก $-\frac{nc}{b}<t_0<\frac{mc}{a}$ และจาก $-\frac{nc}{b}+r\le-\frac{nc}{b}+1$ จะได้

$$t_0\in(-\frac{nc}{b},\frac{mc}{a})=(-\frac{nc}{b},-\frac{nc}{b}+r)\subseteq(-\frac{nc}{b},-\frac{nc}{b}+1)$$

แสดงว่า t_0 เป็นจำนวนเต็มในช่วงเปิด $(-\frac{nc}{b},-\frac{nc}{b}+1)$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $-\frac{nc}{b}\notin\mathbf{Z}$ นอกจากนี้ โดยบทตั้งที่ 2 จะมีจำนวนเต็มเพียงจำนวนเดียวในช่วงเปิด $(-\frac{nc}{b},\frac{mc}{a})$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าจำนวนเต็มนั้นมีค่าเป็น $\left\lceil -\frac{nc}{b}\right\rceil$

จาก $t_0\in(-\frac{nc}{b},\frac{mc}{a})$ ดังนั้น $t_0=\left\lceil -\frac{nc}{b}\right\rceil$ และได้ $\left\lceil -\frac{nc}{b}\right\rceil=t_0<\frac{mc}{a}$ จบการพิสูจน์ส่วนแรก

($\Leftarrow$) โดยทฤษฎีบทที่ 2 จากเงื่อนไข $d\,|\,c$ จะได้ว่าสมการ $ax+by=c$ มีผลเฉลย และจากบทตั้งที่ 1 จะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปคือ $x=\frac{nc+bt}{d}$ และ $y=\frac{mc-at}{d}$ เมื่อ $t\in\mathbf{Z}$

กรณี 1 ถ้า $\frac{dc}{ab}>1$ แล้ว เช่นเดียวกับการพิสูจน์ในส่วนแรก เราสามารถจัดรูปอสมการได้เป็น $\frac{mc}{a}-\left(-\frac{nc}{b}\right)>1$ ดังนั้น จะมี $t_1\in\mathbf{Z}$ ที่ $-\frac{nc}{b}<t_1<\frac{mc}{a}$ ซึ่งสามารถแก้อสมการได้ $nc+bt_1>0$ และ $mc-at_1>0$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$x_1=\frac{nc+bt_1}{d}>0 \text{ และ } y_1=\frac{mc-at_1}{d}>0$$

ดังนั้นสมการมีผลเฉลย (x_1,y_1) อย่างน้อย 1 ชุดที่เป็นบวก

กรณี 2 ถ้า $\frac{dc}{ab} \le 1$, $-\frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z}$ และ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil < \frac{mc}{a}$ แล้ว เราสมมติ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = t_2$ สำหรับบาง $t_2 \in \mathbf{Z}$ จะได้ $-\frac{nc}{b} \le t_2 < \frac{mc}{a}$ แต่เนื่องจาก $-\frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z}$ ดังนั้นจะได้ $-\frac{nc}{b} < t_2 < \frac{mc}{a}$ และในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในกรณี 1 สมการจะมีผลเฉลยชุดหนึ่งเป็น

$$x_2 = \frac{nc + bt_2}{d} > 0 \text{ และ } y_2 = \frac{mc - at_2}{d} > 0$$

นั่นคือสมการมีผลเฉลย (x_2, y_2) อย่างน้อย 1 ชุดที่เป็นบวก

จากทั้งสองกรณีจึงสรุปได้ว่าสมการจะมีผลเฉลยที่เป็นบวก จบการพิสูจน์ (i)

(ii) จากเงื่อนไข $d \mid c$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 2 และบทตั้งที่ 1 สมการ $ax - by = c$ จะมีผลเฉลย โดยที่ผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูป

$$x = \frac{nc - bt}{d} \text{ และ } y = \frac{mc - at}{d} \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbf{Z} \qquad (1)$$

จากนั้น พิจารณาค่า t ที่ทำให้ x และ y เป็นบวก โดยสมมติ

$$x = \frac{nc - bt}{d} > 0 \text{ และ } y = \frac{mc - at}{d} > 0$$

เราสามารถแก้อสมการทั้งสองได้ว่า

$$t < \frac{nc}{b} \text{ และ } t < \frac{mc}{a} \quad \text{ดังนั้น } t < \min\left\{\frac{nc}{b}, \frac{mc}{a}\right\}$$

ซึ่งค่า t ดังกล่าวจะมีอยู่เป็นจำนวนอนันต์ และเมื่อแทนค่า t แต่ละค่าใน **(1)** จะส่งผลให้เกิดผลเฉลย (x, y) ที่เป็นบวกของสมการมีเป็นจำนวนอนันต์ชุดเช่นกัน $\square$

ในการพิสูจน์เงื่อนไขที่จะทำให้สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปรมีผลเฉลยที่เป็นลบนั้น สามารถพิสูจน์ได้โดยอ้างผลจากทฤษฎีบทที่ 4 โดยยังคงพิจารณาเพียงสองรูปแบบเช่นเดิมดังต่อไปนี้

บทแทรกที่ 1 *ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a,b > 0$ และ $d \mid c$ การมีผลเฉลยที่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร เป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้*

(i) *สมการ $ax + by = c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นลบก็ต่อเมื่อ*

$$-\frac{dc}{ab} > 1 \text{ หรือ} \left(-\frac{dc}{ab} \le 1 \text{ และ } \frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z} \text{ และ } \left\lceil \frac{nc}{b} \right\rceil < -\frac{mc}{a}\right)$$

(ii) *สมการ $ax - by = c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นลบเป็นจำนวนอนันต์ชุด*

การพิสูจน์ (i) เห็นได้ชัดว่าสมการ $ax + by = c$ มีผลเฉลยที่เป็นลบ ก็ต่อเมื่อสมการ $ax + by = -c$ มีผลเฉลยที่เป็นบวก ดังนั้นสามารถอ้างผลจากทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (i) โดยการแทน $-c$ ในเงื่อนไขของทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (i) จะได้

$$\frac{d(-c)}{ab} > 1 \text{ หรือ } \left(\frac{d(-c)}{ab} \le 1 \text{ และ } -\frac{n(-c)}{b} \notin \mathbf{Z} \text{ และ } \left\lceil -\frac{n(-c)}{b} \right\rceil < \frac{m(-c)}{a}\right)$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น $-\frac{dc}{ab} > 1$ หรือ $\left(-\frac{dc}{ab} \le 1 \text{ และ } \frac{nc}{b} \notin \mathbf{Z} \text{ และ } \left\lceil \frac{nc}{b} \right\rceil < -\frac{mc}{a}\right)$

(ii) จากเงื่อนไข $d\,|\,c$ จะได้ $d\,|-c$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (ii) สมการ $ax-by=-c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกเป็นจำนวนอนันต์ชุด สมมติเป็น $(p_i,q_i),\ p_i,q_i\in\mathbf{Z}^{+}$ และ $i\in I$ สำหรับบางเซตดัชนีอนันต์ I จึงได้ว่า $ap_i-bq_i=-c$ และทำให้ได้ $a(-p_i)-b(-q_i)=c$ เมื่อ $-p_i,-q_i\in\mathbf{Z}^{-}$ เพราะฉะนั้น สมการ $ax-by=c$ มีผลเฉลยที่เป็นลบเป็นจำนวนอนันต์ชุด □

อภิปรายผล

ในส่วนนี้เราจะเริ่มต้นด้วยตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (i) และบทแทรกที่ 1 ข้อที่ (i) ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดสมการ $4x+10y=14$ เราจะทดสอบการมีผลเฉลยที่เป็นบวกตามทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (i) จะเห็นว่า $(4,10)=2$ และ $2\,|\,14$ ต่อมาพิจารณา $\frac{dc}{ab}=\frac{(2)(14)}{(4)(10)}=0.7\le 1$ และเขียนผลรวมเชิงเส้น $2=4(-2)+10(1)$ จะได้ $n=-2,m=1$ ดังนั้นจะได้ว่า

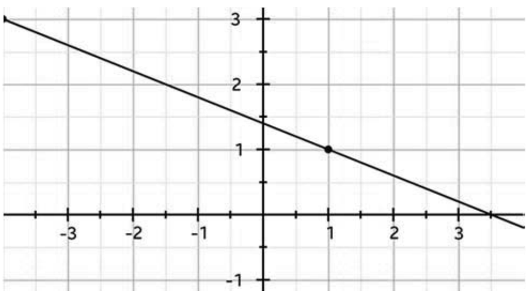
$$-\frac{nc}{b}=-\frac{(-2)(14)}{10}=2.8\notin\mathbf{Z} \text{ และ } \frac{mc}{a}=\frac{(1)(14)}{4}=3.5 \text{ จะได้ } \left\lceil -\frac{nc}{b}\right\rceil<\frac{mc}{a}$$

ซึ่งทั้งหมดนี้เป็นไปตามเงื่อนไขของทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (i) ดังนั้น จึงสรุปว่าสมการมีผลเฉลยที่เป็นบวก

ต่อมา พิจารณาผลเฉลยที่เป็นลบของสมการโดยทดสอบกับบทแทรกที่ 1 ข้อที่ (i) จะได้

$-\frac{dc}{ab}=-0.7<1,\ \left\lceil\frac{nc}{b}\right\rceil=\lceil 2.8\rceil=3>-3.5=-\frac{mc}{a}$ ซึ่งไม่เป็นไปตามเงื่อนไขของบทแทรกที่ 1 ข้อที่ (i) ดังนั้น สมการ $4x+10y=14$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นลบ

เมื่อเปรียบเทียบผลจากทฤษฎีบทกับการวาดกราฟของสมการ $4x+10y=14$ ตามภาพที่ 1 แล้ว จะเห็นว่ากราฟผ่านจุด $(1,1)$ ซึ่งก็คือผลเฉลยที่เป็นบวกของสมการ นอกจากนี้เส้นกราฟที่วาดได้ไม่ผ่านจตุภาคที่ 3 นั่นคือสมการไม่มีผลเฉลยที่เป็นลบอย่างแน่นอน ซึ่งให้ผลตรงกับการตรวจสอบจากทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (i) และบทแทรกที่ 1 ข้อที่ (i) ข้างต้น



ภาพที่ 1 กราฟของสมการ $4x+10y=14$

นอกจากนี้ ผลลัพธ์จากการตรวจสอบข้างต้นจะไม่เปลี่ยนแปลงไปแม้ว่าจะใช้ค่า n และ m ชุดอื่นๆก็ตาม เช่น ถ้าเขียน $2=4(8)+10(-3)$ จะได้ $n=8,m=-3$

ดังนั้นจะได้ว่า $-\frac{nc}{b}=-\frac{(8)(14)}{10}=-11.2\notin\mathbf{Z}$ และ $\frac{mc}{a}=\frac{(-3)(14)}{4}=-10.5$

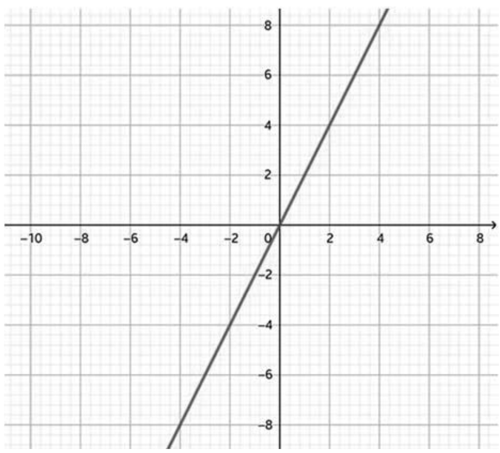
จะได้ $\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = -11 < \frac{mc}{a}$ ซึ่งทั้งหมดนี้ยังคงเป็นไปตามเงื่อนไขของทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (i) ดังนั้น จึงสรุปว่าสมการมีผลเฉลยที่เป็นบวกเช่นเดิม สำหรับการตรวจสอบว่าสมการ $4x+10y=14$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นลบโดยใช้ $n=8$ และ $m=-3$ ก็สามารถตรวจสอบได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดสมการ $4x+3y=-10$ เราจะทดสอบการมีผลเฉลยที่เป็นลบ จะเห็นว่า $d=(4,3)=1$ ซึ่งหาร -10 ลงตัว คำนวณ $-\frac{dc}{ab} = -\frac{(1)(-10)}{(4)(3)} = \frac{10}{12} < 1$ และเขียนผลรวมเชิงเส้น $1=4(4)+3(-5)$ จะได้ $n=4, m=-5$ ดังนั้นจะได้ว่า

$\frac{nc}{b} = \frac{(4)(-10)}{3} \approx -13.33 \notin \mathbf{Z}$ และ $-\frac{mc}{a} = -\frac{(-5)(-10)}{4} = -12.5$ จะได้

$\left\lceil -\frac{nc}{b} \right\rceil = -13 < \frac{mc}{a}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของบทแทรกที่ 1 ข้อที่ (i) ดังนั้น จึงสรุปว่าสมการมีผลเฉลยที่เป็นลบ เช่น $(-1,-2)$ ตรงตามผลการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาการมีผลเฉลยที่เป็นบวกและผลเฉลยที่เป็นลบของสมการ $-2x+y=0$ โดยจัดรูปได้เป็น $2x-y=0$ จะเห็นว่า $d=(2,-1)=1$ ซึ่ง $1 \mid 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4 (ii) และบทแทรกที่ 1 ข้อที่ (ii) สมการ $2x-y=0$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกและมีผลเฉลยที่เป็นลบเป็นอนันต์ชุด อยู่ในรูป $(n,2n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ดังแสดงในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 กราฟของสมการ $2x-y=0$

เมื่อพิจารณาทฤษฎีบทที่ 4 (ii) และบทแทรกที่ 1 ข้อที่ (ii) จะพบว่าให้เงื่อนไขแบบเดียวกันในการมีผลเฉลยที่เป็นบวกและผลเฉลยที่เป็นลบของสมการในรูปแบบ $ax-by=c$ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าสมการในรูปแบบ $ax-by=c$ จะมีผลเฉลยที่เป็นบวกก็ต่อเมื่อสมการมีผลเฉลยที่เป็นลบ

สุดท้ายนี้ จะเห็นว่าการตรวจสอบการมีผลเฉลยที่เป็นบวกหรือเป็นลบตามทฤษฎีบทที่ 4 ข้อที่ (i) และบทแทรกที่ 1 ข้อที่ (i) นั้น จะต้องเขียนผลรวมเชิงเส้น $d=an+bm$ เสียก่อนเพื่อหาค่า m,n ที่จะนำมา

ทดสอบในทฤษฎีบท จึงอาจทำให้ไม่สะดวกนัก หากสามารถปรับเงื่อนไขของทฤษฎีบทให้สามารถตรวจสอบผลได้โดยใช้เพียงค่า a,b,c และ $d=(a,b)$ โดยไม่จำเป็นต้องอ้างอิงค่า m,n จากผลรวมเชิงเส้นแล้ว ก็จะทำให้เกิดความสะดวกรวดเร็วในการใช้ทฤษฎีบทมากขึ้น ซึ่งผู้วิจัยขอละประเด็นนี้ไว้เป็นปัญหาเปิดสำหรับผู้สนใจศึกษาต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการวิจัย “ผลเฉลยที่เป็นบวกและผลเฉลยที่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร” โดยได้รับทุนสนับสนุนจากมหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2560 ผู้วิจัยขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ในการสนับสนุนทุนวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Burton, D. M. (2006). **Elementary number theory**. Tata McGraw-Hill Education.

Costica, L. (2014). Methods of solving Diophantine equations in secondary education in Romania. **Science Journal of Education, 2**(1), 22-32.

Eisenbeis, C., Temam, O. & Wijshoff, H. (1992). **On efficiently characterizing solutions of linear Diophantine equations and its application to data dependence analysis** Doctoral dissertation, INRIA.

Filgueiras, M. & Tomas, A. P. (1993, October). Fast methods for solving linear Diophantine equations. In **Portuguese Conference on Artificial Intelligence** (pp. 297-306). Springer, Berlin, Heidelberg.

Khorramizadeh, M. & Mahdavi-Amiri, N. (2008). On solving linear Diophantine systems using generalized Rosser's algorithm. **Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 34**(2), 1-25.