# ทฤษฎีการลู่เข้าสำหรับการส่งไม่ขยายออกแบบคู่ผสมในปริภูมิแคทซีโร่

# Convergence Theorems for a Hybrid Pair of Nonexpansive Mappings in CAT (0) Spaces

กฤษณะ โสขุมา*
Kritsana Sokhuma
อภิชาติ ลือสมัย*
Apichart Luesamai
อรพรรณ สุวรรณเสน*
Orapun Suwannasen
ภัทรพร ตัสโต*
Pattaraporn Tusto

**Received** : March 30, 2019
**Revised** : May 7, 2019
**Accepted** : May 31, 2019

**บทคัดย่อ**

การวิจัยในครั้งนี้เป็นการศึกษาการลู่เข้าในปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ สำหรับการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก t แบบคู่ผสมกับการส่งหลายค่าไม่ขยายออก T โดยใช้วิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา การศึกษาครั้งนี้ได้ตัดเงื่อนไข T(w) = {w} สำหรับทุกๆ จุดตรึงร่วม w สำหรับการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก t แบบคู่ผสมกับการส่งหลายค่าไม่ขยายออก T ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ค่อนข้างเข้มของ นาคนิมิตร อรรคศรีวร และกฤษณะ โสขุมา (2015, หน้า 177-189) และเป็นการขยายผลงานวิจัยของอัดดิน แอ็บโด และอิมดัด (2014, หน้า 1-13) ที่ได้ศึกษาในปริภูมิบานาค

**คำสำคัญ : วิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา/ ปริภูมิแคทซีโร่ / การส่งหลายค่า / การส่งไม่ขยายออก**

**Abstract**

In this paper, we construct an iteration scheme involving a hybrid pair of the single valued nonexpansive mapping t and the multivalued nonexpansive mapping T of a complete CAT(0) space. In process, we remove a restricted condition (called end-point condition) in Akkasriworn and Sokhuma's results (Akkasriworn and Sokhuma. 2015: 177–189) and utilize the same to prove some convergence theorems. The results are expansion from Banach spaces results of Uddin, Abdou and Imdad. (Uddin, Abdou and Imdad. 2014: 1–13).

**Keywords : Ishikawa Iteration / CAT(0) Spaces / Multivalued Mapping / Nonexpansive Mapping**

*อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร
Lecturer in Mathematics Faculty of Science and Technology Phranakhon Rajabhat University

**บทนำ**

การหาระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อนำไปใช้ในการประมาณค่าคำตอบนั้นมีนักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่ง ให้ความสนใจศึกษา หลังจากที่ได้ศึกษาการมีคำตอบของสมการต่างๆ แล้ว ปัญหาที่น่าสนใจต่อไปคือเราจะหาคำตอบของสมการต่างๆ นั้นได้อย่างไร คำถามดังกล่าวนี้ทำให้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากสนใจศึกษาและคิดค้นระเบียบวิธีทำซ้ำของจุดตรึง (Fixed point iterations) ต่างๆที่ใช้ในการหาคำตอบและประมาณค่าคำตอบ นอกจากนี้ยังนำไปประยุกต์ใช้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาในเรื่องของสมการตัวดำเนินการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear operator equations) การแก้ปัญหาอสมการแปรผัน (Variational inequality problem) การแก้สมการหาคำตอบของปัญหาดุลยภาพ (Equilibrium problems) ปัญหาที่ดีที่สุด (Optimizations problems) ปัญหาน้อยที่สุด (Minimizations problems) ทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต ปริภูมิบานาค และปริภูมิแคทซีโร่

ในปี ค.ศ. 1974 อิชิกาวา (Ishikawa, 1974, pp.147-150) ได้สร้างวิธีทำซ้ำเพื่อใช้ในการประมาณค่าจุดตรึงในปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert spaces) สำหรับการส่งหดตัวกระชับเทียม (Pseudo-contractive compact mapping) ซึ่งเป็นกรณีทั่วไปกว่าการส่งไม่ขยายออก จากนั้นในปี ค.ศ. 1976 โรเดส (Rhoades, 1976, pp.741-750) ได้ศึกษาอัตราการลู่เข้า (Rate of convergence) ของวิธีทำซ้ำแบบมานน์เปรียบเทียบกับวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวาภายใต้สถานการณ์ปัญหาแบบเดียวกัน โรเดส พบว่า วิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวามีอัตราการลู่เข้าสู่จุดตรึงเร็วกว่าวิธีทำซ้ำแบบมานน์

นักคณิตศาสตร์หลายท่านได้ศึกษา วิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าจุดตรึงร่วม (Common fixed point) ระหว่างการส่งค่าเดี่ยวแบบคู่ผสมกับการส่งหลายค่าโดยศึกษาการมีจุดตรึงร่วมและวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าเพื่อหาค่าจุดตรึงร่วมของการส่งอีกหลายรูปแบบทั้งในปริภูมิบานาค ปริภูมิฮิลเบิร์ต ปริภูมิแคทซีโร่ และปริภูมิอื่นๆ อย่างต่อเนื่อง

ในปี ค.ศ. 2016 อัดดินและอิมดัด (Uddin & Imdad, 2016, pp.127-139) เห็นว่าผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ ที่มีอยู่ ส่วนใหญ่มีเงื่อนไขที่ค่อนข้างเข้ม (Strong condition) เกินไป เงื่อนไขนั้นคือ $T(w) = \{w\}$ สำหรับทุกๆ จุดตรึงร่วม $w$ สำหรับการส่งค่าเดี่ยวแบบคู่ผสมกับการส่งหลายค่า โดยอ้างอิงผลงานวิจัยของ กฤษณะ โสขุมา และอรรถพล แก้วขาว (Sokhuma & Kaewkhao, 2010, pp.1-9) ซึ่งผลงานวิจัยชิ้นดังกล่าวทำการศึกษาบนปริภูมิบานาค จากนั้นอัดดิน แอ็บโด และอิมดัด จึงได้สร้างวิธีทำซ้ำขึ้นใหม่ เพื่อใช้ประมาณค่าจุดตรึงร่วมบนปริภูมิบานาค แต่ตัดเงื่อนไขที่ว่า $T(w) = \{w\}$ สำหรับทุกๆ จุดตรึงร่วม $w$ สำหรับการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออกแบบคู่ผสมกับการส่งหลายค่าไม่ขยายออก โดยในการพิสูจน์พวกเขาได้ใช้เงื่อนไขที่ว่า $P_T(x)$ เป็นการส่งไม่ขยายออกซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ค่อนข้างอ่อน (Weak condition) เป็นการทดแทน

จากการศึกษาของ อัดดินและอิมดัด และการศึกษาของ อัดดิน แอ็บโด และอิมดัด ผู้วิจัยเห็นว่าควรขยายการศึกษาจากปริภูมิบานาคไปเป็นปริภูมิแคทซีโร่ โดยใช้วิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา และใช้เงื่อนไขเช่นเดียวกับการศึกษาของ อัดดิน และอิมดัด และการศึกษาของ อัดดิน แอ็บโด และอิมดัด สำหรับการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออกแบบคู่ผสมกับการส่งหลายค่าไม่ขยายออก เพื่อปรับปรุงเงื่อนไขที่ นาคนิมิตร อรรคศรีวร และกฤษณะ โสขุมา ยิ่งไปกว่านั้นยังเป็นการขยายผลงานวิจัยของอัดดิน แอ็บโด และอิมดัด ที่ได้ศึกษาในปริภูมิบานาค

**วิธีดำเนินการวิจัย**

ความรู้พื้นฐานที่นำมาใช้ในการวิจัยมีดังนี้

จุดศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic centers) ถ้ากำหนดให้ K เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง และคอนเว็กซ์ของปริภูมิแคทซีโร่ X และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน X สำหรับทุกๆ $x \in X$ จะนิยามรัศมีเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic radius) ได้ดังนี้

$$r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x)$$

ให้ $r \equiv r(K, \{x_n\}) := \inf\{ r(x, \{x_n\}) : x \in K\}$

และ $A \equiv A(K, \{x_n\}) := \{x \in K : r(x, \{x_n\}) = r\}$

เรียก จำนวนจริง r ว่า รัศมีเชิงเส้นกำกับของลำดับ $\{x_n\}$ ที่สัมพันธ์กับ K และ

เรียก เซต A ว่า จุดศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับ $\{x_n\}$ ที่สัมพันธ์กับ K

โดยทั่วไป ถ้าปริภูมิแคทซีโร่ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์ และ K เป็นเซตย่อยปิด คอนเว็กซ์ของปริภูมิ X แล้ว $A(K, \{x_n\})$ จะมีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น ลำดับ $\{x_n\}$ ในปริภูมิแคทซีโร่ X จะเรียกว่า ลู่เข้าแบบเดลต้า ($\Delta$–convergent) สู่ค่า x ถ้า x เป็นจุดศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับเพียงจุดเดียวเท่านั้น สำหรับทุกๆ ลำดับย่อยของลำดับ $\{x_n\}$

ผู้วิจัยได้รวบรวมสมบัติเบื้องต้นในปริภูมิแคทซีโร่ ที่นำไปใช้เพื่อการพิสูจน์ทฤษฎีบท ดังนี้

บทตั้ง 2.1 (Kirk & Panyanak, 2008, pp. 3689-3696) ทุกๆ ลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ จะมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบเดลต้า ($\Delta$–convergent subsequence)

บทตั้ง 2.2 (Dhompongsa, Kirk & Panyanak, 2007, pp. 35-45) กำหนดให้ K เป็นเซตย่อยที่เป็นเซตปิดและคอนเว็กซ์ ของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ และถ้าลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตในเซตย่อย K แล้ว จุดศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับ $\{x_n\}$ จะเป็นสมาชิกในเซต K

บทตั้ง 2.3 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิแคทซีโร่

(1) สำหรับทุกๆ $x, y \in X$ และ $u \in [0, 1]$ จะมีจุด $z \in [0, 1]$ เพียงจุดเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $d(x, z) = ud(x, y)$ และ $d(y, z) = (1 - u)d(x, y)$ เราจะใช้สัญลักษณ์ $(1 - u)x \oplus uy$ แทนจุด z เพียงจุดเดียวที่สอดคล้องกับสมการข้างต้น

(2) สำหรับทุกๆ $x, y, z \in X$ และ $u \in [0, 1]$ จะได้ว่า

$d((1 - u)x \oplus uy, z) \leq (1 - u)d(x, z) + ud(y, z)$

การมีจุดตรึงของการส่งไม่ขยายออก ในปริภูมิแคทซีโร่ได้รับการพิสูจน์โดยเคิร์ก (W.A. Kirk, 2004, pp.113-142) ตามลำดับดังนี้

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ K เป็นเซตปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง คอนเว็กซ์และมีขอบเขตของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X และ ถ้ากำหนดให้ $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออกแล้ว t จะมีจุดตรึง

ทฤษฎีบท 2.5 (Nanjaras & Panyanak, 2010, pp.1-14) กำหนดให้ K เป็นเซตปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง คอนเว็กซ์และมีขอบเขตของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X และถ้ากำหนดให้ $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก แล้ว $I - t$ จะเป็นเดมิโคลสส (Demiclosed) ที่จุด 0

บทแทรก 2.6 (Dhompongsa, Kirk and Sims. 2006: 762–772) กำหนดให้ K เป็นเซตปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง คอนเว็กซ์และมีขอบเขตของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X เมื่อ $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก

ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตในเซต K ซึ่งทำให้ $\lim_{n\to\infty} d(t(x_n), x_n) = 0$ และ $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = w$ แล้ว $t(w) = w$

บทตั้ง 2.7 (Laowang & Panyanak. 2013: 1–5) กำหนดให้ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ และ $x \in X$ กำหนด $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับที่อยู่ในช่วง [a, b] สำหรับบาง a, b $\in$ (0, 1) และ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X ที่ทำให้ $\limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq r$ , $\limsup_{n\to\infty} d(y_n, x) \leq r$ และ

$\lim_{n\to\infty} d((1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n y_n, x) = r$ สำหรับบาง $r \geq 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$

บทตั้ง 2.8 (Kirk. 2004: 113–142) กำหนดให้ X เป็นปริภูมิแคทซีโร่ และ K เป็นเซตย่อยไม่ว่างที่กระชับและคอนเว็กซ์ของ X และถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับย่อยในเซต K แล้ว

$\mathrm{dist}(y, T(y)) \leq d(y, x_n) + \mathrm{dist}(x_n, T(x_n)) + H(T(x_n), T(y))$

เมื่อ $y \in K$ และ T เป็นการส่งหลายค่าจากเซต K ไปยังเซตย่อยปิดที่มีขอบเขตของเซต K

บทตั้ง 2.9 (Zhou and other. 2002: 591–600) กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ ที่ซึ่ง $a_{n+1} \leq (1 + b_n)a_n$ สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ หาค่าได้ ในกรณีเฉพาะ ถ้ามีลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$ ที่ลู่เข้าสู่ค่า 0 แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

**ผลการวิจัย**

ผู้วิจัยได้กำหนดบทนิยามวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวาเพื่อใช้ประมาณค่าจุดตรึงร่วมสำหรับการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออกแบบคู่ผสมกับการส่งหลายค่าไม่ขยายออกในปริภูมิแคทซีโร่ ดังนี้

บทนิยาม 3.1 กำหนดให้ K เป็นเซตย่อยปิดไม่เป็นเซตว่างที่มีขอบเขตและคอนเว็กซ์ของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X โดย $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก และ $T: K \longrightarrow PB(K)$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออกที่ซึ่ง $P_T(x) = \{y \in T(x) : d(x, y) = \mathrm{dist}(x, T(x))\}$ เมื่อให้ $x_1 \in K$ และ ลำดับ $\{x_n\}$ ของวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา กำหนดดังนี้

$$y_n = (1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n z_n,$$
$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n t(y_n)$$

สำหรับทุกๆ $n \in N$ โดยที่ $z_n \in P_T(t(x_n))$ เมื่อ $\{\alpha_n\}$ , $\{\beta_n\} \subset (0, 1)$

ผู้วิจัยขอนำเสนอผลลัพธ์ของการศึกษาวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา สำหรับการส่งคู่ผสมไม่ขยายออกในปริภูมิแคทซีโร่ ดังนี้

บทตั้ง 3.2 กำหนดให้ $T: K \longrightarrow PB(K)$ เป็นการส่งแบบหลายค่า โดยที่ $P_T(x) = \{y \in T(x) : d(x, y) = \mathrm{dist}(x, T(x))\}$ แล้วจะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $x \in Fix(T)$ กล่าวคือ $x \in T(x)$

(2) $P_T(x) = \{x\}$ กล่าวคือ $x = y$ สำหรับทุกๆ $y \in P_T(x)$

(3) $x \in Fix(P_T)$ กล่าวคือ $x \in P_T(x)$

นั่นคือ $Fix(T) = Fix(P_T)$

พิสูจน์ จะแสดงการพิสูจน์ ดังนี้

(1) $\Longrightarrow$ (2) เนื่องจาก ถ้า $x \in Fix(T)$ แล้ว $dist(x, T(x)) = 0$ ดังนั้น สำหรับทุกๆ $y \in P_T(x)$ จะได้ว่า $d(x, y) = dist(x, T(x)) = 0$ นั่นคือ $x = y$ กล่าวคือ $P_T(x) = \{x\}$

(2) $\Longrightarrow$ (3) เนื่องจาก ถ้า $P_T(x) = \{x\}$ แล้ว จะได้ $x \in Fix(P_T)$ นั่นคือ $x \in P_T(x)$

(3) $\Longrightarrow$ (1) เนื่องจาก ถ้า $x \in Fix(P_T)$ แล้ว จะได้ $x \in P_T(x)$ ดังนั้น

$0 = d(x, x) = dist(x, T(x))$ แต่เนื่องจาก $T(x)$ เป็นเซตปิด จะได้ว่า $x \in T(x)$ นั่นคือ $x \in Fix(T)$ จากการพิสูจน์ข้างต้น สรุปได้ว่า $Fix(T) = Fix(P_T)$

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ K เป็นเซตย่อยปิดไม่เป็นเซตว่างที่มีขอบเขตและคอนเว็กซ์ของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X โดย $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก และ $T: K \longrightarrow PB(K)$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ตามลำดับ โดยที่ $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ ที่ซึ่ง $P_T$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ถ้าให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา ดังบทนิยาม 3.1 แล้ว $\lim_{n\to\infty} d(x_n, w)$ หาค่าได้ สำหรับทุกๆ $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x_1 \in K$ และ $w \in Fix(t)$ โดยบทตั้ง 3.2 จะพบว่า $w \in P_T(w) = \{w\}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, w) &= d((1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n t(y_n), w) \\
&\leq (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n d(t(y_n), t(w)) \\
&\leq (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n d(y_n, w) \\
&= (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n d((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n z_n, w) \\
&\leq (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n(1-\beta_n)d(x_n, w) + \alpha_n\beta_n d(z_n, w) \\
&\leq (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n(1-\beta_n)d(x_n, w) + \alpha_n\beta_n dist(z_n, P_T(w)) \\
&\leq (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n(1-\beta_n)d(x_n, w) + \alpha_n\beta_n H(P_T(t(x_n)), P_T(w)) \\
&\leq (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n(1-\beta_n)d(x_n, w) + \alpha_n\beta_n d(t(x_n), w) \\
&\leq (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n(1-\beta_n)d(x_n, w) + \alpha_n\beta_n d(x_n, w) = d(x_n, w)
\end{aligned}$$

เนื่องจากลำดับ $\{d(x_n, w)\}$ เป็นลำดับลดและมีค่าขอบเขตล่าง จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} d(x_n, w)$ หาค่าได้

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ K เป็นเซตย่อยปิดไม่เป็นเซตว่างที่มีขอบเขตและคอนเว็กซ์ของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X โดย $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก และ $T: K \longrightarrow PB(K)$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ตามลำดับ โดยที่ $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ ที่ซึ่ง $P_T$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ถ้าให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา ดังบทนิยาม 3.1 แล้ว $\lim_{n\to\infty} d(x_n, w) = 0$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x_1 \in K$ และ $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$ โดยบทตั้ง 3.2 เราจะได้ว่า $w \in P_T(w) = \{w\}$ จากทฤษฎีบท 3.3 พบว่า $\lim_{n\to\infty} d(x_n, w)$ หาค่าได้ สมมติให้ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, w) = c$

พิจารณา

$$\begin{aligned} d(y_n, w) &= d((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n z_n, w) \\ &\le (1-\beta_n)d(x_n, w) + \beta_n d(z_n, w) \\ &= (1-\beta_n)d(x_n, w) + \beta_n \mathrm{dist}(z_n, P_T(w)) \\ &\le (1-\beta_n)d(x_n, w) + \beta_n H(P_T(t(x_n)), P_T(w)) \\ &\le (1-\beta_n)d(x_n, w) + \beta_n d(t(x_n), w) \\ &\le (1-\beta_n)d(x_n, w) + \beta_n d(x_n, w) = d(x_n, w) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $d(t(y_n), w) \le d(y_n, w) \le d(x_n, w)$

ดังนั้น $\limsup_{n\to\infty} d(t(y_n), w) \le \limsup_{n\to\infty} d(y_n, w) \le \limsup_{n\to\infty} d(x_n, w) = c$ ---------------- (1)

จาก $c = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, w) = \lim_{n\to\infty} d((1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n t(y_n), w)$

โดยเงื่อนไขของ $\alpha_n \in (0, 1)$ และบทตั้ง 2.7 เราจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} d(t(y_n), x_n) = 0$

ทฤษฎีบท 3.5 กำหนดให้ K เป็นเซตย่อยปิดไม่เป็นเซตว่างที่มีขอบเขตและคอนเว็กซ์ของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X โดย $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก และ $T: K \longrightarrow PB(K)$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ตามลำดับ โดยที่ $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ ที่ซึ่ง $P_T$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับของวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา ดังบทนิยาม 3.1 แล้ว $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x_1 \in K$ และ $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$ โดยบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า $w \in P_T(w) = \{w\}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, w) &= d((1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n t(y_n), w) \\ &\le (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n d(t(y_n), t(w)) \\ &\le (1-\alpha_n)d(x_n, w) + \alpha_n d(y_n, w) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\dfrac{d(x_{n+1}, w) - d(x_n, w)}{\alpha_n} \le d(y_n, w) - d(x_n, w)$

โดยที่ $0 < a \le \alpha_n \le b < 1$ จะได้ว่า $\left(\dfrac{d(x_{n+1}, w) - d(x_n, w)}{\alpha_n}\right) + d(x_n, w) \le d(y_n, w)$

ดังนั้น $\liminf_{n\to\infty} \left\{\left(\dfrac{d(x_{n+1}, w) - d(x_n, w)}{\alpha_n}\right) + d(x_n, w)\right\} \le \liminf_{n\to\infty} d(y_n, w)$

จะได้ $c \le \liminf_{n\to\infty} d(y_n, w)$ และจาก (1) ได้ว่า $\limsup_{n\to\infty} d(y_n, w) \le c$

แสดงว่า $c = \lim_{n\to\infty} d(y_n, w) = \lim_{n\to\infty} d((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n z_n, w)$

จาก $d(z_n, w) = \mathrm{dist}(z_n, P_T(w)) \le H(P_T(t(x_n)), P_T(w)) \le d(t(x_n), w) \le d(x_n, w)$

เมื่อ $z_n \in P_T(t(x_n))$ จะได้ว่า $\limsup\limits_{n\to\infty} d(z_n, w) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n, w) = c$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$

ทฤษฎีบท 3.6 กำหนดให้ K เป็นเซตย่อยปิดไม่เป็นเซตว่างที่มีขอบเขตและคอนเว็กซ์ของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X โดย $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก และ $T: K \longrightarrow PB(K)$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ตามลำดับ โดยที่ $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \varnothing$ ที่ซึ่ง $P_T$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับของวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา ดังบทนิยาม 3.1 แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} d(t(x_n), x_n) = 0$

พิสูจน์ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(T(x_n), x_n) &\leq d(T(x_n), t(y_n)) + d(t(y_n), x_n) \\ &\leq d(x_n, y_n) + d(t(y_n), x_n) \\ &= d(x_n, (1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n z_n) + d(t(y_n), x_n) \\ &\leq [(1-\beta_n)d(x_n, x_n) + \beta_n d(x_n, z_n)] + d(t(y_n), x_n) \\ &= \beta_n d(x_n, z_n) + d(t(y_n), x_n) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} d(t(x_n), x_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n d(x_n, z_n) + \lim\limits_{n\to\infty} d(t(y_n), x_n)$

จากทฤษฎีบท 3.4 และทฤษฎีบท 3.5 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} d(t(x_n), x_n) = 0$

ทฤษฎีบท 3.7 กำหนดให้ K เป็นเซตย่อยปิดไม่เป็นเซตว่างที่มีขอบเขตและคอนเว็กซ์ของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X โดย $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก และ $T: K \longrightarrow PB(K)$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ตามลำดับ โดยที่ $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \varnothing$ ที่ซึ่ง $P_T$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออกถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับของวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา ดังบทนิยาม 3.1 ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบเดลต้า ($\Delta$-convergence) สู่ค่า y แล้ว $y \in Fix(t) \cap Fix(T)$

พิสูจน์ สมมติให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่ค่า y จะแสดงว่า $y \in Fix(t) \cap Fix(T)$

จาก $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่ค่า y จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} d(t(x_n), x_n) = d(t(y), y) = 0$

โดยอาศัยบทแทรก 2.6 จาก $y \in K$ และ $t(y) = y$ จะได้ว่า $y \in Fix(t)$ และอาศัยบทตั้ง 2.8 จะได้

$$\begin{aligned} dist(y, P_T(y)) &\leq d(y, x_n) + dist(x_n, P_T(t(x_n))) + H(P_T(t(x_n)), P_T(y)) \\ &\leq d(y, x_n) + d(x_n, z_n) + d(x_n, y) \text{ เมื่อ } z_n \in P_T(t(x_n)) \end{aligned}$$

โดยที่ $d(y, x_n) + d(x_n, z_n) + d(x_n, y)$ ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ n มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ดังนั้น $dist(y, P_T(y)) = 0$ เมื่อ n มีค่าเข้าใกล้อนันต์ กล่าวคือ $y \in P_T(y)$ และจากบทตั้ง 3.2 จะได้ $y \in Fix(T)$

นั่นคือ ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่ค่า y แล้ว $y \in Fix(t) \cap Fix(T)$

ทฤษฎีบท 3.8 กำหนดให้ K เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง มีขอบเขตและคอนเว็กซ์ของปริภูมิบริบูรณ์แคทซีโร่ X โดย $t: K \longrightarrow K$ เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก และ $T: K \longrightarrow PB(K)$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ตามลำดับ โดยที่ $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \varnothing$ ที่ซึ่ง $P_T$ เป็นการส่งหลายค่าไม่ขยายออก ถ้า $\{x_n\}$ เป็น

ลำดับของวิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวา ดังบทนิยาม 3.1 แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่จุดตรึงร่วมของการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก t และการส่งหลายค่าไม่ขยายออก T

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต และ $\lim_{n\to\infty} d(t(x_n), x_n) = 0$ กำหนดให้ $\omega_w(x_n) := \bigcup A(\{u_n\})$ เมื่อ $\omega_w(x_n)$ เป็นการยูเนียนจุดศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของทุกๆ ลำดับย่อย $\{u_n\}$ ของลำดับ $\{x_n\}$ จะแสดงว่า $\omega_w(x_n) \subset Fix(t) \cap Fix(T)$ โดยจะมีลำดับย่อย $\{u_n\}$ ของลำดับ $\{x_n\}$ ที่ซึ่ง $A(\{u_n\}) = \{u\}$ โดยบทตั้ง 2.1 และบทตั้ง 2.2 จะมีลำดับย่อย $\{v_n\}$ ของลำดับ $\{u_n\}$ ที่ทำให้ $\Delta-\lim_{n\to\infty} v_n = v \in K$ และจาก $\lim_{n\to\infty} d(t(v_n), v_n) = 0$ จะได้ว่า $v \in Fix(t)$ และเนื่องจาก

$$\begin{aligned} dist(v, P_T(v)) &\le dist(v, P_T(t(v_n))) + H(P_T(t(v_n)), P_T(v)) \\ &\le d(v, z_n) + d(v_n, v) \quad \text{เมื่อ } z_n \in P_T(t(v_n)) \\ &\le d(v, v_n) + d(v_n, z_n) + d(v_n, v) \end{aligned}$$

เมื่อ $d(v, v_n) + d(v_n, z_n) + d(v_n, v)$ ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ n มีค่าเข้าใกล้อนันต์ นั่นคือ $v \in Fix(P_T)$ จากบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า $v \in Fix(T)$ สรุปได้ว่า $v \in Fix(t) \cap Fix(T)$

ขั้นตอนต่อไป จะแสดงว่า u = v สมมติให้ $u \neq v$ เพราะว่า การส่ง t เป็นการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก และ $v \in Fix(t) \cap Fix(T)$ เมื่อ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, v)$ หาค่าได้ และอาศัยทฤษฎีบท 3.3 และการมีอยู่เพียงหนึ่งเดียวของจุดศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} d(v_n, v) &< \limsup_{n\to\infty} d(v_n, u) \\ &< \limsup_{n\to\infty} d(u_n, u) \\ &< \limsup_{n\to\infty} d(u_n, v) \\ &< \limsup_{n\to\infty} d(x_n, v) \\ &< \limsup_{n\to\infty} d(v_n, v) \end{aligned}$$

พบว่า $\limsup_{n\to\infty} d(v_n, v) < \limsup_{n\to\infty} d(v_n, v)$ ซึ่งเกิดการขัดแย้ง แสดงว่า $u \neq v$ เป็นเท็จ

ดังนั้น u = v และ $v \in Fix(t) \cap Fix(T)$ การพิสูจน์ในลำดับต่อไปคือ การพิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่จุดตรึงร่วมของการส่ง t และ T กล่าวคือ จะต้องพิสูจน์ว่า $\omega_w(x_n)$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น สมมติให้ $\{u_n\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{x_n\}$ โดยบทตั้ง 2.1 และบทตั้ง 2.2 จะมีลำดับย่อย $\{v_n\}$ ของลำดับ $\{u_n\}$ ที่ทำให้ $\Delta-\lim_{n\to\infty} v_n = v \in K$ สมมติว่า $A(\{u_n\}) = \{u\}$ และ $A(\{x_n\}) = \{x\}$ จะได้ u = v และ $v \in Fix(t) \cap Fix(T)$ การพิสูจน์ลำดับสุดท้าย จะต้องแสดงว่า x = v สมมติว่า $x \neq v$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} d(x_n, v)$ หาค่าได้ โดยอาศัยการมีอยู่เพียงหนึ่งเดียวของจุดศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} d(v_n, v) &< \limsup_{n\to\infty} d(v_n, x)\\ &< \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x)\\ &< \limsup_{n\to\infty} d(x_n, v)\\ &< \limsup_{n\to\infty} d(v_n, v)\end{aligned}$$

พบว่า $\limsup_{n\to\infty} d(v_n, v) < \limsup_{n\to\infty} d(v_n, v)$ ซึ่งเกิดการขัดแย้ง แสดงว่า $x \neq v$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $x = v$ นั่นคือ $v \in Fix(t) \cap Fix(T)$ สรุปได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบเดลต้าสู่จุดตรึงร่วมของการส่งค่าเดี่ยวไม่ขยายออก t และการส่งหลายค่าไม่ขยายออก T

**อภิปรายผล**

จากการศึกษา วิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวาที่ผู้วิจัยได้นิยามขึ้น โดยปรับปรุงมาจากนิยามในผลงานวิจัยของนาคนิมิตร อรรคศรีวร และกฤษณะ โสขุมา ที่นิยามไว้ในปริภูมิบานาคและนำมาใช้นิยามกับปริภูมิแคทซีโร่ โดยตัดเงื่อนไข $T(w) = \{w\}$ สำหรับทุกๆ จุดตรึงร่วม w และใช้เงื่อนไข $P_T(x)$ เป็นการส่งไม่ขยายออกซึ่งเป็นเงื่อนไขที่อ่อนกว่ามาทดแทนเงื่อนไขเดิม พบว่า วิธีทำซ้ำแบบอิชิกาวาลู่เข้าแบบเดลต้าสู่จุดตรึงร่วมเช่นกัน ยิ่งไปกว่านั้นยังเป็นการขยายผลงานวิจัยของอัดดิน แอ็บโด และอิมดัด ที่ศึกษาในปริภูมิบานาคอีกด้วย

**กิตติกรรมประกาศ**

ผู้วิจัยขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนามหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครที่ได้สนับสนุนทุนสำหรับทำผลงานวิจัยชิ้นนี้

## References

Akkasriworn, N. & Sokhuma, K. (2015). Convergence theorem for a pair of Asymptotically and multivalued nonexpansive mapping, **Commun. KoreanMath. Soc**, **30**(3), 177-189.

Dhompongsa, S., Kirk, W.A. & Panyanak, B. (2007). Nonexpansive set-valued mappings in metric and Banach spaces. **J Nonlinear Convex Anal, 8**, 35-45.

Dhompongsa, S., Kirk, W.A. & Sims, B. (2006). Fixed points of uniformly lipschitzian Mappings. **Nonlinear Anal, 65**, 762-772.

Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method, **Proc. Amer. Math. Soc, 44**, 147-150.

Kirk, W.A. (2004). Geodesic geometry and fixed point theory II: International Conference on Fixed Point Theory and Applications. **Yokohama Publishers**. Yokohama. Japan. 113-142.

Kirk, W.A. & Panyanak, B. (2008). A concept of convergence in geodesic spaces. **Nonlinear Anal, 68**, 3689-3696.

Laokul, T. & Panyanak, B. (2009). Approximating Fixed Points of Nonexpansive Mappings in CAT(0) Spaces. **Int. Journal of Math. Anal, 3**, 1305–1315.

Laowang, W. & Panyanak, B. (2010). Approximating fixed points of nonexpansive nonself mappings in CAT(0) spaces. **Fixed Point Theory Appl,** vol. 2010. Article ID 367274. 11 pages.

Mann, W.R. (1953). Mean value methods in iteration. **Proc. Amer. Math. Soc., 4**, 506-510.

Nanjaras, B. & Panyanak, B. (2010). Demiclosed Principle for Asymptotically Nonexpansive Mappings in CAT(0) Space. **Fixed Point Theory Appl,** vol. 2010. Article ID 268780. 14 pages.

Panyanak, B. (2007). Mann and Ishikawa iterative processes for multi-valued mappings in Banach spaces. **Computers & Mathematics with Applications**, **54**(6), 872-877.

Rhoades, B.E. (1976). Comments on two fixed point iteration methods. **J. Math. Anal. Appl, 56**, 741-750.

Sastry, K.P.R. & Babu, G.V.R. (2005). Convergence of Ishikawa iterates for a multivalued mapping with a fixed point. **Czechoslovak Math. J., 55**(4), 817-826.

Shahzad, N. & Zegeye, H. (2009). On Mann and Ishikawa iteration schemes for multivalued maps in Banach spaces. **Nonlinear Anal, 71**(3-4), 838-844.

Sokhuma, K. (2013). $\Delta$-Convergence Theorems for a Pair of Single valued and Multivalued Nonexpansive Mappings in CAT(0) spaces. **Journal of Math. Anal., 4**, 23-31.

Sokhuma, K. & Kaewkhao, A. (2010). Ishikawa Iterative Process for a Pair of Single-valued and Multivalued Nonexpansive Mappings in Banach Spaces. **Fixed Point Theory and Applications**. vol. 2010. Article ID 618767. 9 pages.

Uddin, I., Abdou, A.A. & Imdad, M. (2014). A new iteration scheme for a hybrid pair of generalized nonexpansive mappings. **Fixed Point Theory and Applications,** 205, 1-13.

Uddin, I. & Imdad, I. (2016). A new iteration scheme for a hybrid pair of nonexpansive mapping**.** **Honam Mathematical J., 38**(1), 127-139.

Zhou, H., Agarwal, R.P., Cho, Y.J. & Kim, Y.S. (2002). Nonexpansive mappings and Iterative methods in uniformly convex Banach spaces. **Georgian Mathematical Journal, 9**, 591-600.