เศษส่วนลักกี้บางเศษส่วน
Some of Lucky Fractions

พิกุลแก้ว มีดอินทร์*
Pikoolkaew Muedin
ไพชยนต์ สิริเสถียรวัฒนา**
Paichayon Sirisatianwattana

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาเศษส่วนลักกี้ และสร้างเศษส่วนลักกี้จากเศษส่วนลักกี้ที่มีอยู่บางเศษส่วนซึ่งคิดค้นโดย Osler พร้อมทั้งตรวจสอบคุณสมบัติของเศษส่วนลักกี้ใหม่กับหาสมบัติใหม่บางประการของเศษส่วนลักกี้ใหม่

คำสำคัญ : เศษส่วนลักกี้ / สมบัติการลบ / สมบัติการซ้ำ

ABSTRACT

This work studies lucky fractions and creates the new lucky fractions based on some lucky fractions which is proposed by Osler. This work also verifies the properties of new lucky fractions and finds some properties of lucky fractions.

Keywords : Lucky Fraction / Subtraction Property / Repetition Property

*นักศึกษาโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
**อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

บทนำ

พิจารณาเศษส่วน $\frac{16}{64}$ พบว่ามีค่า เท่ากับ $\frac{1}{4}$ จะสังเกตเห็นว่า ถ้าตัดเลข 6 ออก ทั้งเศษและส่วนแบบที่ไม่ถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์ จะได้คำตอบที่ถูกต้อง $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$ เศษส่วนในลักษณะเช่นนี้ เราจะเรียกว่า "เศษส่วนลักกี้" แนวความคิดนี้ได้นำเสนอโดย Osler, T. J., (2007) และเขียนแทนจำนวนเต็ม a ด้วย $a=\overline{a_1a_2...a_m}$ โดยที่ a_1 ถึง a_m เป็นเลขโดดฐานสิบของ a (ใช้ "บาร์ (bar)" เพื่อที่จะไม่ให้เกิดความสับสนกับการคูณ a_1 คูณ $a_2...$) ตัวอย่างเช่น $a=26$ นั่นคือ $a_1=2$ และ $a_2=6$ ในทำนองเดียวกันจะเขียนจำนวนเต็ม b แทน $b=\overline{b_1b_2...b_c}$ และจำนวนเต็ม x แทน $x=\overline{x_1x_2...x_d}$ จากการกำหนดสัญลักษณ์ข้างต้นทำให้สามารถเขียนเศษส่วนลักกี้ในรูปแบบนี้ได้ คือ

$$\frac{\overline{a_1a_2...a_mx_1x_2...x_d}}{\overline{x_1x_2...x_db_1b_2...b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2...a_m}}{\overline{b_1b_2...b_c}}$$

และเขียนได้ในอีกรูปแบบ ดังนี้

$$\frac{\overline{a_1a_2...a_mx_1x_2...x_d}}{\overline{x_1x_2...x_db_1b_2...b_c}}=\frac{10^d a+x}{10^c x+b} \qquad \text{............. (1)}$$

นอกจากนี้แล้ว Osler ยังได้กำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนเศษส่วนลักกี้โดยเฉพาะ เพื่อง่ายและสะดวกต่อการพิสูจน์คือ $\{N/D;X\}$ แทน เศษส่วนลัคกี้ ที่ตัวเศษมีตัวเลขโดด N ตัว และตัวส่วนมีตัวเลขโดด D ตัว และ X เป็นจำนวนตัวเลขโดดที่ตัดออกไป เช่น $\frac{13}{325}$ เขียนได้เป็น $\{2/3;1\}$ เป็นต้น

ในงานวิจัยนี้ จากแนวคิดของเศษส่วนลักกี้ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษา ค้นคว้าและหาคุณสมบัติอื่นเพิ่มเติม โดยในงานวิจัยชิ้นนี้ ผู้วิจัยสนใจเศษส่วนลักกี้ 4 ประเภท ต่อไปนี้

ประเภท $\{2/2;1\}: \frac{16}{64}, \frac{26}{65}, \frac{19}{95}$ และ $\frac{49}{98}$ .... (2)

ประเภท $\{3/3;1\}: \frac{217}{775}$ และ $\frac{249}{996}$ .... (3)

ประเภท $\{3/3;2\}: \frac{742}{424}, \frac{654}{545}$ และ $\frac{484}{847}$ .... (4)

ประเภท $\{4/4;2\}: \frac{1751}{5150}, \frac{3681}{8180}$ และ $\frac{1484}{8480}$ .... (5)

เศษส่วนลักกี้ใหม่

พิจารณาเศษส่วน $\frac{16}{64}$ ถ้าเพิ่มเลข 1 ทางด้านซ้ายมือในตัวเศษ ในทำนองเดียวกันก็เพิ่มเลข 4 ทางด้านซ้ายมือในตัวส่วนด้วย ทำให้เราได้เศษส่วนใหม่เป็น $\frac{116}{464}$ ถ้าเราตัดเลข 6 ออก เราจะได้รับคำตอบที่ถูกต้อง $\frac{11\cancel{6}}{4\cancel{6}4}=\frac{11}{44}=\frac{1}{4}$ เราจะใช้ขั้นตอนการดำเนินการนี้สำหรับเศษส่วนลักกี้ ใน (2), (3), (4) และ (5) เราได้เศษส่วนลักกี้ใหม่ ดังนี้

ประเภท $\{3/3;1,1,1\}: \frac{116}{464}, \frac{226}{565}, \frac{119}{595}$ และ $\frac{449}{898}$

ประเภท $\{6/6;2,2,2\}: \frac{171751}{505150}, \frac{363681}{808180}$ และ $\frac{141484}{808480}$

ประเภท $\{5/5;1,2,2\}: \frac{21217}{75775}$ และ $\frac{24249}{96996}$

ประเภท $\{4/4;2,1,1\}: \frac{7742}{4424}, \frac{6654}{5545}$ และ $\frac{4484}{7847}$

ต่อไปนี้ เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการพิสูจน์ในรูปแบบของเศษส่วนลักกี้ ดังนั้นในที่นี้ เราจะใช้สัญลักษณ์ $\{N/D;X,\mathrm{pN},\mathrm{pD}\}$ แทน เศษส่วนลักกี้ ที่ตัวเศษมีตัวเลขโดด N ตัว, ตัวส่วนมีตัวเลขโดด D ตัว, X เป็นจำนวนตัวเลขโดดที่ตัดออกไป, pN แทนจำนวนตัวที่ต้องการเติมในตัวเศษและ pD แทนจำนวนตัวเลขที่ต้องการเติมในตัวส่วนเราจะพิสูจน์ว่าเศษส่วนเหล่านี้เป็นเศษส่วนลักกี้ เช่น $\frac{445}{858}$ เราเขียนแทนด้วย $\{3/3;1,1,1\}$ เป็นต้น นอกจากนี้ถ้าเราเขียนจำนวนเต็ม a , b และ x แทน $a=\overline{a_1a_2\ldots a_m}$, $b=\overline{b_1b_2\ldots b_c}$ และ $x=\overline{x_1x_2\ldots \mathrm{x}_d}$ ทำให้สามารถเขียนเศษส่วนลักกี้ใหม่ในรูปแบบต่อไปนี้ได้ คือ

$$\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c b_1b_2\ldots b_c}} \qquad \text{............... (6)}$$

โดย (6) เราสามารถเขียนเศษส่วนลักกี้ใหม่ ประเภท $\{3/3;1,1,1\}$ และ ประเภท $\{6/6;2,2,2\}$ ได้ ในงานวิจัยนี้คือเป็นเศษส่วนลักกี้ใหม่รูปแบบที่ 1 ดังนี้

$$\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}} = \frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x} \qquad \text{............... (7)}$$

สำหรับเศษส่วนลักกี้ใหม่รูปแบบที่ 2 คือ ประเภท $\{5/5;1,2,2\}$ เขียนได้ในรูป

$$\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}} = \frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x} \qquad \text{............... (8)}$$

และสำหรับเศษส่วนลักกี้ใหม่รูปแบบที่ 3 คือ ประเภท $\{4/4;2,1,1\}$ เขียนได้ในรูป

$$\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}} = \frac{\left(10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x} \qquad \text{.............. (9)}$$

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด c ตัว และถ้า

$$\frac{10^{d}a+x}{10^{c}x+b}=\frac{a}{b}, \left(i.e. \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}} \right)$$

แล้ว จะได้ว่า สมการ (7) คือ $\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}, \left(i.e. \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}} \right)$

พิสูจน์ จาก $\dfrac{10^d a + x}{10^c x + b} = \dfrac{a}{b}$

จะได้ว่า $10^d ab + bx = 10^c ax + ab$ .... (10)

บวกทั้งสองข้างของสมการ (10) ด้วย $10^{2c} ab$

$$10^{2c} ab + 10^d ab + bx = 10^{2c} ab + 10^c ax + ab$$

$$b\left(10^{2c} a + 10^d a + x\right) = a\left(10^{2c} b + 10^c x + b\right)$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{\left(10^{2c} + 10^d\right)a + x}{\left(10^{2c} + 1\right)b + 10^c x} = \frac{a}{b}$$ .... (11)

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด c ตัว และถ้า

$$\frac{10^d a + x}{10^c x + b} = \frac{a}{b}, \left(i.e. \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m x_1 x_2 \ldots x_d}}{\overline{x_1 x_2 \ldots x_d b_1 b_2 \ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}}{\overline{b_1 b_2 \ldots b_c}} \right)$$ แล้ว จะได้สมการ (8) คือ

$$\frac{\left(10^{2c-1} + 10^d\right)a + x}{\left(10^{2c-1} + 1\right)b + 10^c x} = \frac{a}{b}, \left(i.e. \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_m x_1 x_2 \ldots x_d}}{\overline{b_1 b_2 \ldots b_c x_1 x_2 \ldots x_d b_1 b_2 \ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}}{\overline{b_1 b_2 \ldots b_c}} \right)$$

พิสูจน์ ใช้แนวคิดและหลักการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 2.1

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบไปด้วยตัวเลขโดด c ตัว และถ้า

$$\frac{10^d a + x}{10^c x + b} = \frac{a}{b}, \left(i.e. \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m x_1 x_2 \ldots x_d}}{\overline{x_1 x_2 \ldots x_d b_1 b_2 \ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}}{\overline{b_1 b_2 \ldots b_c}} \right)$$ แล้ว จะได้ สมการ (9) คือ

$$\frac{\left(10^{2c+1} + 10^d\right)a + x}{\left(10^{2c+1} + 1\right)b + 10^c x} = \frac{a}{b}, \left(i.e. \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_m x_1 x_2 \ldots x_d}}{\overline{b_1 b_2 \ldots b_c x_1 x_2 \ldots x_d b_1 b_2 \ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}}{\overline{b_1 b_2 \ldots b_c}} \right)$$

พิสูจน์ ใช้แนวคิดและหลักการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 2.1และ 2.2

คุณสมบัติบางประการของเศษส่วนลักกี้ใหม่

ในหัวข้อนี้เราจะนำเสนอคุณสมบัติบางประการของเศษส่วนลักกี้ใหม่ ซึ่งได้อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 2 โดยมีทั้งหมด 3 รูปแบบ ดังนี้

รูปแบบที่ 1 สมบัติการลบ

จากสมการ (6) ด้านซ้ายมือ, $\left(\dfrac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_m a_1 a_2 \ldots a_m x_1 x_2 \ldots x_d}}{\overline{b_1 b_2 \ldots b_c x_1 x_2 \ldots x_d b_1 b_2 \ldots b_c}} \right)$ เราจะแสดงให้เห็นว่า

ถ้านำจำนวนเต็ม μ ใดๆ คูณ a แล้วนำผลคูณ μa ไปลบออกจากจำนวนของตัวเศษ และในทำนองเดียวกัน ถ้านำจำนวนเต็ม μ ใดๆ คูณ b แล้วนำผลคูณ μb ไปลบออกจากจำนวนของตัวส่วน ซึ่งทำให้ค่าของเศษส่วนยังคงเท่าเดิม

ตัวอย่าง 3.1 $$\frac{226}{565}=\frac{226-1\times 2}{565-1\times 5}=\frac{226-2\times 2}{565-2\times 5}=\frac{226-3\times 2}{565-3\times 5}=\cdots$$

จากแนวคิดและหลักการดำเนินการที่ได้อธิบายข้างต้น เราสามารถเขียนเป็นทฤษฎีและพิสูจน์ให้เห็นจริง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a และ μ เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

แล้ว $$\frac{(10^{2c}+10^{d})a+x-\mu a}{(10^{2c}+1)b+10^{c}x-\mu b}=\frac{a}{b}$$

พิสูจน์ จาก $$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

$$\left[\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x\right]b=a\left[\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x\right]$$

$$\left(10^{2c}+10^{d}\right)ab+xb=\left(10^{2c}+1\right)ab+10^{c}ax \qquad \text{.......... (12)}$$

นำ μab ลบทั้งสองข้างของสมการ (12) จะได้

$$\left(10^{2c}+10^{d}\right)ab+xb-\mu ab=\left(10^{2c}+1\right)ab+10^{c}ax-\mu ab$$

$$b\left[\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x-\mu a\right]=a\left[\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x-\mu b\right] \qquad \text{.......... (13)}$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x-\mu a}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x-\mu b}=\frac{a}{b} \qquad \text{.......... (14)}$$

สมบัติการทำซ้ำตัวเลขที่ตัดออก

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็ม และถ้า

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

แล้ว

$$\frac{10^{d+2c}a+10^{2d}a+10^{d}x+10^{2c}a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c+d}b+10^{c+d}x}=\frac{a}{b}$$

พิสูจน์ แทน $\mu=1$ ในสมการ (14) จะได้

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x-1a}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x-1b}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x-a}{10^{2c}b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

$$\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x-a=\frac{a}{b}\left(10^{2c}b+10^{c}x\right) \qquad \text{......... (15)}$$

จาก (7) เรามี

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

$$\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x=\frac{a}{b}\left[\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x\right] \qquad \text{.......... (16)}$$

นำสมการ (15) และ (16) มาเทียบอัตราส่วน จะได้

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x-a}{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}=\frac{\left(10^{2c}b+10^{c}x\right)}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x} \qquad \text{.......... (17)}$$

คูณทั้งสองข้างของสมการ (17) ด้วย 10^{d}

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a-a+x}{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}\times 10^{d}=\frac{\left(10^{2c}b+10^{c}x\right)}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}\times 10^{d}$$

$$\frac{10^{2c+d}a+10^{2d}a-10^{d}a+10^{d}x}{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}=\frac{10^{2c+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x} \qquad \text{.......... (18)}$$

บวก 1 ทั้งสองข้างในสมการ (18) จะได้

$$1+\frac{10^{2c+d}a+10^{2d}a-10^{d}a+10^{d}x}{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}=1+\frac{10^{2c+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}$$

$$\frac{10^{2c}a+x}{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}+\frac{10^{d}\left(10^{2c}a+10^{d}a+x\right)}{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}=1+\frac{10^{2c+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}$$

$$10^{d}+\frac{10^{2c}a+x}{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}=1+\frac{10^{2c+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x} \qquad \text{....... (19)}$$

สังเกตเห็นว่า

$$\frac{10^{d+2c}a+10^{2d}a+10^{d}x+10^{2c}a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c+d}b+10^{c+d}x}=\frac{10^{d}\left(10^{2c}a+10^{d}a+x\right)+10^{2c}a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c+d}b+10^{c+d}x}$$

$$=\frac{10^{d}\left[\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x\right]+10^{2c}a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c+d}b+10^{c+d}x}$$

$$=\frac{\left(\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x\right)\left(10+\dfrac{10^{2c}a+x}{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}\right)}{\left(\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x\right)\left(1+\dfrac{10^{2c+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}\right)}$$

จากทฤษฎีบท 2.1 และสมการที่ (19) จะได้ว่า $\dfrac{10^{d+2c}a+10^{2d}a+10^{d}x+10^{2c}a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c+d}b+10^{c+d}x}=\dfrac{a}{b}$

สมบัติการซ้ำทั้งหมด

จากสมการ (6) ด้านซ้ายมือ $\left(\dfrac{\overline{a_1a_2...a_ma_1a_2...a_mx_1x_2...x_d}}{\overline{b_1b_2...b_cx_1x_2...x_db_1b_2...b_c}}\right)$ เราจะแสดงให้เห็นว่า

เศษส่วนที่เกิดจากการซ้ำทั้งชุดของตัวเลขทั้งเศษและส่วนไปเรื่อยๆ ยังคงเป็นเศษส่วนลักกี้

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว และถ้า

$$\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2...a_ma_1a_2...a_mx_1x_2...x_d}}{\overline{b_1b_2...b_cx_1x_2...x_db_1b_2...b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2...a_m}}{\overline{b_1b_2...b_c}}\right)$$

แล้ว

$$\frac{10^{d+4c}a+10^{2d+2c}a+10^{d+2c}x+\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{10^{d+4c}b+10^{d+2c}b+10^{d+3c}x+\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},$$

$$\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2...a_ma_1a_2...a_mx_1x_2...x_da_1a_2...a_ma_1a_2...a_mx_1x_2...x_d}}{\overline{b_1b_2...b_cx_1x_2...x_db_1b_2...b_cb_1b_2...b_cx_1x_2...x_db_1b_2...b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2...a_m}}{\overline{b_1b_2...b_c}}\right)$$

พิสูจน์ จากสมการ (12), คูณทั้งสองข้างของสมการ (12) ด้วย 10^{d+2c} จะได้

$$\left[\left(10^{2c}+10^{d}\right)ab\right]10^{d+2c}+10^{d+2c}bx=\left[\left(10^{2c}+1\right)ab\right]10^{d+2c}+10^{d+3c}ax \quad ......(20)$$

จากนั้นนำ (21)+(20) จะได้

$$\left[\left(10^{2c}+10^{d}\right)ab\right]10^{d+2c}+10^{d+2c}bx+\left(10^{2c}+10^{d}\right)ab+bx$$

$$=\left[\left(10^{2c}+1\right)ab\right]10^{d+2c}+10^{d+3c}ax+\left(10^{2c}+1\right)ab+10^{c}ax$$

จากสมบัติการแยกตัวประกอบ จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{\left[\left(10^{2c}+10^{d}\right)a\right]10^{d+2c}+10^{d+2c}x+\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left[\left(10^{2c}+1\right)b\right]10^{d+2c}+10^{d+3c}x+\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{10^{d+4c}a+10^{2d+2c}a+10^{d+2c}x+\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{10^{d+4c}b+10^{d+2c}b+10^{d+3c}x+\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

รูปแบบที่ 2 สมบัติการลบ

จากสมการ (6) ด้านซ้ายมือ $\left(\frac{\overline{a_1a_2...a_ma_1a_2...a_mx_1x_2...x_d}}{\overline{b_1b_2...b_cx_1x_2...x_db_1b_2...b_c}}\right)$ เราจะแสดงให้เห็นว่า เศษส่วนลักกี้ใหม่ประเภท $\{5/5;1,2,2\}$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ 2 ในงานวิจัยนี้ มีสมบัติการลบเช่นเดียวกันกับเศษส่วนลักกี้ที่นำเสนอโดย Osler ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a และ μ เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ถ้า $\dfrac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\dfrac{a}{b},\left(i.e.\dfrac{\overline{a_1a_2...a_ma_1a_2...a_mx_1x_2...x_d}}{\overline{b_1b_2...b_cx_1x_2...x_db_1b_2...b_c}}=\dfrac{\overline{a_1a_2...a_m}}{\overline{b_1b_2...b_c}}\right)$

แล้ว $\dfrac{(10^{2c-1}+10^{d})a+x-\mu a}{(10^{2c-1}+1)b+10^{c}x-\mu b}=\dfrac{a}{b}$

พิสูจน์ เรามี

$$\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

$$\left[\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x\right]b=a\left[\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x\right]$$

$$\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)ab+xb=\left(10^{2c-1}+1\right)ab+10^{c}ax \qquad .... (21)$$

นำ μab ลบทั้งสองข้างของสมการ (21) จะได้

$$b\left[\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x-\mu a\right]=a\left[\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x-\mu b\right] \qquad .... (22)$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x-\mu a}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x-\mu b}=\frac{a}{b} \qquad ......(23)$$

สมบัติการซ้ำกันของตัวเลขที่ตัดออก

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็ม และถ้า

$$\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

แล้ว

$$\frac{10^{2c-1+d}a+10^{2d}a+10^{d}x+10^{2c-1}a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}=\frac{a}{b}$$

พิสูจน์ แทน $\mu=1$ ในสมการ (23) จะได้

$$\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x-1a}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x-1b}=\frac{a}{b}$$

$$\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x-a=\frac{a}{b}\left(10^{2c-1}b+10^{c}x\right) \qquad \text{........ (24)}$$

เรามี
$$\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

$$\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x=\frac{a}{b}\left[\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x\right] \qquad \text{........ (25)}$$

นำสมการ (24)และ (25) มาเทียบอัตราส่วน จะได้

$$\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x-a}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}=\frac{\left(10^{2c-1}b+10^{c}x\right)}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x} \qquad \text{........ (26)}$$

คูณทั้งสองข้างของสมการ (26) ด้วย 10^{d}

$$\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a-a+x}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}\times 10^{d}=\frac{\left(10^{2c-1}b+10^{c}x\right)}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}\times 10^{d}$$

$$\frac{10^{2c-1+d}a+10^{2d}a-10^{d}a+10^{d}x}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}=\frac{10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x} \qquad \text{........ (27)}$$

บวก 1 ทั้งสองข้างในสมการ (27) จะได้

$$1+\frac{10^{2c-1+d}a+10^{2d}a-10^{d}a+10^{d}x}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}=1+\frac{10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}$$

$$\frac{10^{2c-1}a+x+10^{d}\left(10^{2c-1}a+10^{d}a+x\right)}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}=1+\frac{10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}$$

$$\frac{10^{2c-1}a+x}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}+\frac{10^{d}\left(10^{2c-1}a+10^{d}a+x\right)}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}=1+\frac{10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}$$

$$10^{d}+\frac{10^{2c-1}a+x}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}=1+\frac{10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x} \quad \text{........ (28)}$$

สังเกตเห็นว่า

$$\frac{10^{2c-1+d}a+10^{2d}a+10^{d}x+10^{2c-1}a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}=\frac{10^{d}\left(10^{2c-1}a+10^{d}a+x\right)+10^{2c-1}a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}$$

$$=\frac{\left(\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x\right)\left(10^{d}+\dfrac{10^{2c-1}a+x}{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}\right)}{\left(\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x\right)\left(1+\dfrac{10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}\right)}$$

โดยทฤษฎีบท 2.2 และสมการ (28) จะได้ว่า $\dfrac{10^{2c-1+d}a+10^{2d}a+10^{d}x+10^{2c-1}a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c-1+d}b+10^{c+d}x}=\dfrac{a}{b}$

สมบัติการซ้ำทั้งหมด

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่า เศษส่วนลักกี้ใหม่ประเภท $\{5/5;1,2,2\}$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ 2 ในงานวิจัยนี้ มีสมบัติการซ้ำทั้งหมด ในลักษณะแบบเดียวกันกับรูปแบบที่ 1

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว และถ้า

$$\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

แล้ว

$$\frac{10^{4c+d-1}a+10^{2d+2c}a+10^{d+2c}x+\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{10^{4c+d-1}b+10^{d+2c}b+10^{d+3c}x+\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},$$

$$\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

พิสูจน์ จากสมการ (21) คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย 10^{d+2c} จะได้

$$\left[\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)ab+bx\right]10^{d+2c} = \left[\left(10^{2c-1}+1\right)ab+10^{c}ax\right]10^{d+2c}$$

$$\left[\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)ab\right]10^{d+2c}+10^{d+2c}bx = \left[\left(10^{2c-1}+1\right)ab\right]10^{d+2c}+10^{d+3c}ax$$

$$\left(10^{2c-1}ab+10^{d}ab\right)10^{d+2c}+10^{d+2c}bx = \left(10^{2c-1}ab+ab\right)10^{d+2c}+10^{d+3c}ax$$

$$10^{4c+d-1}ab+10^{2d+2c}ab+10^{d+2c}bx = 10^{4c+d-1}ab+10^{d+2c}ab+10^{d+3c}ax \quad \text{........ (29)}$$

นำสมการ (29)+(21) จะได้

$$10^{4c+d-1}ab+10^{2d+2c}ab+10^{d+2c}bx+\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)ab+bx$$
$$=10^{4c+d-1}ab+10^{d+2c}ab+10^{d+3c}ax+\left(10^{2c-1}+1\right)ab+10^{c}ax$$

จากสมบัติการแยกตัวประกอบและจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{10^{4c+d-1}a+10^{2d+2c}a+10^{d+2c}x+\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{10^{4c+d-1}b+10^{d+2c}b+10^{d+3c}x+\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

รูปแบบที่ 3 สมบัติการลบ

ทฤษฎีบทที่จะนำเสนอต่อไปนี้ เป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่า เศษส่วนลักกี้ใหม่ในรูปแบบที่ 3 ประเภท $\{4/4;2,1,1\}$ มีสมบัติการลบในทำนองเดียวกันกับรูปแบบที่ 1 และ 2

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a และ μ เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า

$$\frac{\left(10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_ma_1a_2\ldots a_mx_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_cx_1x_2\ldots x_db_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

แล้ว $$\frac{(10^{2c+1}+10^{d})a+x-\mu a}{(10^{2c+1}+1)b+10^{c}x-\mu b}=\frac{a}{b}$$

พิสูจน์ พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.1 และ 3.4

สมบัติการซ้ำกันของตัวเลขที่ตัด

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็ม และถ้า

$$\frac{\left(10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_ma_1a_2\ldots a_mx_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_cx_1x_2\ldots x_db_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

แล้ว

สักทอง : วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สทวท.)
ปีที่ 5 ฉบับที่ 1 มกราคม - มิถุนายน 2561

$$\frac{10^{2c+d+1}a+10^{2d}a+10^{d}x+10^{2c+1}a+x}{\left(10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x+10^{2c+d+1}b+10^{c+d}x}=\frac{a}{b}$$

พิสูจน์ พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2 และ 3.5

สมบัติการซ้ำทั้งหมด

ทฤษฎีบท 3.9 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว และถ้า

$$\frac{\left(10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

แล้ว

$$\frac{10^{4c+d+1}a+10^{2d+2c}a+10^{d+2c}x+\left(10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{10^{4c+d+1}b+10^{d+2c}b+10^{d+3c}x+\left(10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b},$$

$$\left(i.e.\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}\right)$$

พิสูจน์ ใช้หลักการพิสูจน์ทำนองเดียวกัน ทฤษฎีบท 3.3 และ 3.6

จากการดำเนินการให้ได้เศษส่วนลักกี้ตามสมการ (7), (8) และ (9) สามารถดำเนินการเติมตัวเลขต่อทางด้านซ้ายไปแบบไม่รู้จบได้ โดยที่ยังเป็นเศษส่วนลักกี้เหมือนเดิม โดยแยกเป็นรูปแบบและแสดงการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

รูปแบบที่ 1 ประเภท $\{3/3;1,1,1\}$ **และ ประเภท** $\{6/6;2,2,2\}$

ถ้าเราทำการดำเนินการเติมตัวเลขทางด้านซ้ายต่อไปเรื่อยๆ เศษส่วนที่ได้ก็ยังคงเป็นจริง

$$\frac{116}{464}=\frac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{\left(10^{2(1)}+10^{1}\right)(1)+6}{\left(10^{2(1)}+1\right)(4)+10^{1}(6)}=\frac{11\cancel{6}}{4\cancel{6}4}=\frac{11}{44}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1116}{4464}=\frac{\left(10^{3c}+10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{3c}+10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{\left(10^{3(1)}+10^{2(1)}+10^{1}\right)(1)+6}{\left(10^{3(1)}+10^{2(1)}+1\right)(4)+10^{1}(6)}=\frac{111\cancel{6}}{44\cancel{6}4}=\frac{111}{444}=\frac{1}{4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1\ldots1116}{4\ldots4464}=\frac{\left(10^{nc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{nc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{\left(10^{n(1)}+\ldots+10^{3(1)}+10^{2(1)}+10^{1}\right)(1)+6}{\left(10^{n(1)}+\ldots+10^{3(1)}+10^{2(1)}+1\right)(4)+10^{1}(6)}$$

$$=\frac{1\ldots111\cancel{6}}{4\ldots44\cancel{6}4}=\frac{1\ldots111}{4\ldots444}=\frac{1}{4}$$

เราได้รูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m\ \ldots\ a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c\ \ldots\ b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m\ \ldots\ a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c\ \ldots\ b_1b_2\ldots b_c b_1b_2\ldots b_c}}$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}$$

จะเห็นได้ว่า สิ่งที่แสดงมาข้างต้นเป็นจริง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว จะได้ว่า

$$\frac{\left(10^{nc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{nc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b} \qquad \text{....... (30)}$$

โดยที่ $n\in N$, $n\geq 2$

พิสูจน์ โดยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ถ้า $n=2$ จะได้ว่า $\dfrac{\left(10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\dfrac{a}{b}$ เป็นจริง ตามทฤษฎีบท 2.1

สมมติให้ $n=k$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{\left(10^{kc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{kc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b} \qquad \text{........ (31)}$$

เราจะแสดงว่า $n=k+1$ เป็นจริง

จากสมการ (31) จะได้

$$\left(\left(10^{kc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+10^{d}\right)a+x\right)b \qquad =a\left(\left(10^{kc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+1\right)b+10^{c}x\right)$$

$$10^{kc}ab+\ldots+10^{3c}ab+10^{2c}ab+10^{d}ab+bx=10^{kc}ab+\ldots+10^{3c}ab+10^{2c}ab+ab+10^{c}ax$$

จากนั้นบวกทั้งสองข้างของสมการข้างต้นด้วย $10^{(k+1)c}ab$

$$\begin{aligned}&10^{(k+1)c}ab+10^{kc}ab+\ldots+10^{3c}ab+10^{2c}ab+10^{d}ab+bx\\&=10^{(k+1)c}ab+10^{kc}ab+\ldots+10^{3c}ab+10^{2c}ab+ab+10^{c}ax\end{aligned}$$

จากสมบัติการแยกตัวประกอบ จัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า

$$\frac{\left(10^{(k+1)c}+10^{kc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{(k+1)c}+10^{kc}+\ldots+10^{3c}+10^{2c}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

ดังนั้น สมการ (30) เป็นจริงสำหรับ $n\geq 2$

รูปแบบที่ 2 ประเภท $\{5/5;1,2,2\}$

ในทำนองเดียวกันถ้าเราทำการดำเนินการเติมตัวเลขไปทางด้านซ้ายต่อไปเรื่อยๆ เศษส่วนที่ได้ก็ยังคงเป็นจริง ดังนี้

$$\frac{21217}{75775}=\frac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{\left(10^{2(2)-1}+10^{1}\right)(75)+7}{\left(10^{2(2)-1}+1\right)(75)+10^{1}(7)}=\frac{2121\cancel{7}}{75\cancel{7}75}=\frac{2121}{7575}=\frac{21}{75}$$

$$\frac{2121217}{7575775}=\frac{\left(10^{3c-1}+10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{3c-1}+10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{\left(10^{3(1)-1}+10^{2(1)-1}+10^{1}\right)(21)+7}{\left(10^{3(1)-1}+10^{2(1)-1}+1\right)(75)+10^{1}(7)}$$

$$=\frac{212121\cancel{7}}{7575\cancel{7}75}=\frac{212121}{757575}=\frac{21}{75}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{21\ldots2121217}{75\ldots7575775}=\frac{\left(10^{nc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{nc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}$$

$$=\frac{\left(10^{n(1)-1}+\ldots+10^{3(1)-1}+10^{2(1)-1}+10^{1}\right)(21)+7}{\left(10^{n(1)-1}+\ldots+10^{3(1)-1}+10^{2(1)-1}+1\right)(75)+10^{1}(7)}$$

$$=\frac{21\ldots212121\cancel{7}}{75\ldots7575\cancel{7}75}=\frac{21\ldots212121}{75\ldots757575}=\frac{21}{75}$$

และเราได้รูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m\ \ldots\ a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c\ \ldots\ b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m\ \ldots\ a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c\ \ldots\ b_1b_2\ldots b_c b_1b_2\ldots b_c}}$$

$$=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}$$

จะเห็นได้ว่า สิ่งที่แสดงมาข้างต้นเป็นจริง สามารถพิสูจน์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.11 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว จะได้ว่า

$$\frac{\left(10^{nc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{nc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b} \qquad \text{........ (32)}$$

โดยที่ $n\in N, n\geq 2$

พิสูจน์ โดยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ถ้า $n=2$ จะได้ว่า $\dfrac{\left(10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\dfrac{a}{b}$ เป็นจริง ตามทฤษฎีบท 2.2

สมมติให้ $n=k$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{\left(10^{kc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{kc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b} \qquad \text{........ (33)}$$

เราจะแสดงว่า $n=k+1$ เป็นจริง

จากสมการ (33) จะได้

$$\left(\left(10^{kc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x\right)b \;=a\left(\left(10^{kc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x\right)$$

$$10^{kc-1}ab+\ldots+10^{3c-1}ab+10^{2c-1}ab+10^{d}ab+bx=10^{kc-1}ab+\ldots+10^{3c-1}ab+10^{2c-1}ab+ab+10^{c-1}ax$$

จากนั้นบวกทั้งสองข้างของสมการข้างต้นด้วย $10^{(k+1)c-1}ab$

$$10^{(k+1)c-1}ab+10^{kc-1}ab+\ldots+10^{3c-1}ab+10^{2c-1}ab+10^{d}ab+bx=10^{(k+1)c-1}ab+10^{kc-1}ab+\ldots+10^{3c-1}ab+10^{2c-1}ab+ab+10^{c}ax$$

จากสมบัติการแยกตัวประกอบ จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{\left(10^{(k+1)c-1}+10^{kc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{(k+1)c-1}+10^{kc-1}+\ldots+10^{3c-1}+10^{2c-1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

ดังนั้น สมการ (32) เป็นจริงสำหรับทุก $n\geq 2$

รูปแบบที่ 3 ประเภท $\{4/4;2,1,1\}$

เช่นเดียวกันกับรูปแบบที่ 1 และ 2 ถ้าเราทำการดำเนินการเติมตัวเลขทางด้านซ้ายต่อไปเรื่อยๆ เศษส่วนดำเนินการตามรูปแบบที่ 3 ก็ยังคงเป็นเศษส่วนลักกี้ ดังนี้

$$\frac{7742}{4424}=\frac{\left(10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{\left(10^{2(1)+1}+10^{1}\right)(7)+42}{\left(10^{2(1)+1}+1\right)(4)+10^{1}(42)}=\frac{77\cancel{42}}{44\cancel{24}}=\frac{77}{44}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{77742}{44424}=\frac{\left(10^{3c+1}+10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{3c+1}+10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{\left(10^{3(1)+1}+10^{2(1)+1}+10^{1}\right)(7)+42}{\left(10^{3(1)+1}+10^{2(1)+1}+1\right)(4)+10^{1}(42)}=\frac{777\cancel{42}}{444\cancel{24}}=\frac{777}{444}=\frac{7}{4}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{7\ldots77742}{4\ldots44424}=\frac{\left(10^{nc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{nc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{\left(10^{n(1)+1}+\ldots+10^{3(1)+1}+10^{2(1)+1}+10^{1}\right)(7)+42}{\left(10^{n(1)+1}+\ldots+10^{3(1)+1}+10^{2(1)+1}+1\right)(4)+10^{1}(42)}$$

$$=\frac{7\ldots777\cancel{42}}{4\ldots444\cancel{24}}=\frac{7\ldots777}{4\ldots444}=\frac{7}{4}$$

และเราได้รูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m \;\ldots\; a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m x_1x_2\ldots x_d}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c \;\ldots\; b_1b_2\ldots b_c x_1x_2\ldots x_d b_1b_2\ldots b_c}} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m \;\ldots\; a_1a_2\ldots a_m a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c \;\ldots\; b_1b_2\ldots b_c b_1b_2\ldots b_c}}$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_m}}{\overline{b_1b_2\ldots b_c}}$$

จะเห็นได้ว่า สิ่งที่แสดงมาข้างต้นเป็นจริง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.12 ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด d ตัว และ b เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว สมมติว่า a เป็นจำนวนเต็มที่ประกอบด้วยเลขโดด c ตัว จะได้ว่า

$$\frac{\left(10^{nc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{nc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b} \qquad \text{........ (34)}$$

โดยที่ $n \in N, n \geq 2$

พิสูจน์ โดยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ถ้า $n=2$ จะได้ว่า $\dfrac{\left(10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\dfrac{a}{b}$ เป็นจริง ตามทฤษฎีบท 2.3

สมมติให้ $n=k$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{\left(10^{kc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{kc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b} \qquad \text{........ (35)}$$

เราจะแสดงว่า $n=k+1$ เป็นจริง จากสมการ (35) จะได้

$$\left(\left(10^{kc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x\right)b \quad =a\left(\left(10^{kc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x\right)$$

$$10^{kc+1}ab+\ldots+10^{3c+1}ab+10^{2c+1}ab+10^{d}ab+bx=10^{kc+1}ab+\ldots+10^{3c+1}ab+10^{2c+1}ab+ab+10^{c}ax$$

จากนั้นบวกทั้งสองข้างของสมการข้างต้นด้วย $10^{(k+1)c+1}ab$

$$10^{(k+1)c+1}ab+10^{kc+1}ab+\ldots+10^{3c+1}ab+10^{2c+1}ab+10^{d}ab+bx=10^{(k+1)c+1}ab+10^{kc+1}ab+\ldots+10^{3c+1}ab+10^{2c+1}ab+ab+10^{c}ax$$

จากสมบัติการแยกตัวประกอบและจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{\left(10^{(k+1)c+1}+10^{kc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+10^{d}\right)a+x}{\left(10^{(k+1)c+1}+10^{kc+1}+\ldots+10^{3c+1}+10^{2c+1}+1\right)b+10^{c}x}=\frac{a}{b}$$

ดังนั้น สมการ (35) เป็นจริงสำหรับ $n \in N,\ n \geq 2$

สรุป

เศษส่วนลักกี้ที่สร้างขึ้นใหม่นี้ ผู้วิจัยสนใจและสร้างโดยใช้เศษส่วนลักกี้ที่มีอยู่ตามประเภทของเศษส่วนลักกี้ (2) (3) (4) และ (5) ตามลำดับ โดยที่เศษส่วนลักกี้ที่ได้ยังคงมีคุณสมบัติต่างๆ เหมือนเศษส่วนลักกี้ที่นำเสนอโดย Osler แต่ทั้งนี้สำหรับผู้สนใจสามารถนำแนวคิดนี้ไปคิดต่อในส่วนของเศษส่วนลักกี้ประเภทอื่นๆ ซึ่งผู้วิจัยเองยังไม่ได้ดำเนินการเช่น ประเภท {2/5;1} ประเภท {2/6;1} เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

Osler, T. J., (2007). Lucky Fractions : Where Bad Arithmetic Gives Correct Results. **Mathematics and computer education**, 162-167.