จำนวนสมาชิกของกึ่งกรุปการแปลง $T_E(X), T_\exists(X)$ และ $T_{E^*}(X)$

The Number of Elements of Transformation Semigroups $T_E(X), T_\exists(X)$ and $T_{E^*}(X)$

วรเชษฐ สมมะณี*
Worachead Sommanee
กมลทิพย์ ปินตาแก้ว*
Kamontip Pintakaew
พิราอร ธรรมมาด*
Pira-on Thummard

บทคัดย่อ

ให้ $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปการแปลงเต็มบนเซต X และสำหรับความสัมพันธ์สมมูล E บนเซต X กำหนดให้

$$T_E(X) = \left\{ f \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E \right\}$$

$$T_\exists(X) = \left\{ f \in T(X) : \forall x, y \in X, (f(x), f(y)) \in E \Rightarrow (x,y) \in E \right\}$$

และ

$$T_{E^*}(X) = \left\{ f \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E \right\}$$

จะได้ว่า $T_E(X), T_\exists(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ซึ่งในบทความวิจัยนี้เราจะหาจำนวนสมาชิกทั้งหมดของกึ่งกรุปการแปลง $T_E(X), T_\exists(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ เมื่อ X เป็นเซตจำกัด

คำสำคัญ : กึ่งกรุปการแปลง / คงสภาพการสมมูล / คงสภาพการสมมูลสองทิศทาง

ABSTRACT

Let $T(X)$ denote the full transformation semigroup on a set X. For an equivalence relation E on X, let

$$T_E(X) = \left\{ f \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E \right\},$$

$$T_\exists(X) = \left\{ f \in T(X) : \forall x, y \in X, (f(x), f(y)) \in E \Rightarrow (x,y) \in E \right\},$$

and

$$T_{E^*}(X) = \left\{ f \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E \right\}.$$

Then $T_E(X), T_\exists(X)$ and $T_{E^*}(X)$ are subsemigroups of $T(X)$. In this paper, we find the number of elements of transformation semigroups $T_E(X), T_\exists(X)$ and $T_{E^*}(X)$ when X is a finite set.

Keywords : Transformation Semigroup / Preserve an Equivalence / Preserve Double Direction Equivalence

*อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

บทนำ

ให้ $T(X)$ คือเซตของฟังก์ชันทั้งหมดจากเซต X ไปยังเซต X จะได้ว่า $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การประกอบ (composition) ของฟังก์ชัน เรียก $T(X)$ ว่าเป็นกึ่งกรุปการแปลงเต็ม (the full transformation semigroup) บนเซต X

กำหนดให้ E เป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) บนเซต X และให้ $T_E(X) = \{f \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E\}$, $T_\exists(X) = \{f \in T(X) : \forall x, y \in X, (f(x), f(y)) \in E \Rightarrow (x,y) \in E\}$ และ $T_{E^*}(X) = \{f \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E\}$

จะได้ว่า $T_E(X), T_\exists(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$

ในที่นี้จะเรียก $T_E(X)$ ว่ากึ่งกรุปการแปลงที่คงสภาพการสมมูล (semigroups of transformations that preserve an equivalence)

$T_\exists(X)$ ว่ากึ่งกรุปการแปลงที่คงสภาพการสมมูลผันกลับ (semigroups of transformations that preserve reverse direction equivalence)

$T_{E^*}(X)$ ว่ากึ่งกรุปการแปลงที่คงสภาพการสมมูล 2 ทิศทาง (semigroups of transformations that preserve double direction equivalence)

ในปี ค.ศ. 2005 (Pei, 2005) ได้ศึกษาสมบัติทางพีชคณิตบางประการของกึ่งกรุป $T_E(X)$ ได้แก่ ความสัมพันธ์ของกรีน (Green’s relations) และความปรกติ (regularity) ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 (Deng, Zeng & Xu, 2010) ได้อธิบายลักษณะทั่วไปของความสัมพันธ์ของกรีน และความปรกติของกึ่งกรุป $T_{E^*}(X)$ และในปี ค.ศ. 2011 (Deng, Zeng & You, 2011) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของกรีน และความปรกติของกึ่งกรุป $T_\exists(X)$ แต่ยังไม่เคยมีการนับจำนวนสมาชิกของกึ่งกรุปการแปลงดังกล่าว ดังนั้นในบทความวิจัยนี้เราจึงจะนับจำนวนสมาชิกทั้งหมดของกึ่งกรุปการแปลง $T_E(X), T_\exists(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ เมื่อ X เป็นเซตจำกัด เพื่อเป็นประโยชน์ในการหาแรงก์ (rank) ของกึ่งกรุปการแปลง $T_E(X), T_\exists(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ ในอนาคต

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษางานวิจัยเรื่อง ความปรกติและความสัมพันธ์ของกรีนสำหรับกึ่งกรุปการแปลงที่คงสภาพการสมมูล (Regularity and Green’s relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence), ความสัมพันธ์ของกรีนและความปรกติสำหรับกึ่งกรุปการแปลงที่คงสภาพการสมมูล 2 ทิศทาง (Green’s relations and regularity for semigroups of transformations that preserve double direction equivalence) และ ความสัมพันธ์ของกรีนและความปรกติสำหรับกึ่งกรุปการแปลงที่คงสภาพการสมมูลผันกลับ (Green’s relations and regularity for semigroups of transformations that preserve reverse direction equivalence)

2. ศึกษาตัวอย่างของจำนวนสมาชิกของกึ่งกรุป $T_E(X), T_\exists(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ เมื่อ X เป็นเซตจำกัด

3. ตั้งสมมติฐานสูตรของจำนวนสมาชิกทั้งหมดของกึ่งกรุป $T_E(X), T_\exists(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ เมื่อ X เป็นเซตจำกัด

4. ทดสอบและพิสูจน์สมมติฐาน

5. สรุปเป็นทฤษฎีบท

ความรู้พื้นฐาน

1. หลักการนับเบื้องต้น (fundamental principle of counting)

หลักการนับเบื้องต้นมีกฎที่สำคัญ 2 ข้อ ได้แก่

1.1 กฎการบวก ในการทำงานอย่างหนึ่งมีวิธีทำได้ k แบบ ที่แตกต่างกัน โดยแต่ละแบบจะทำพร้อมๆ กันไม่ได้ ถ้าแบบที่ $1,2,...,k$ มีวิธีทำ $n_1, n_2, ..., n_k$ วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงานนี้ให้สำเร็จได้ มี $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

1.2 กฎการคูณ ถ้าการทำงานชิ้นหนึ่งแบ่งขั้นตอนการทำงานได้ k ขั้นตอน ขั้นตอนแรกทำได้ n_1 วิธี แต่ละวิธีในการทำงานขั้นตอนแรกจะมีวิธีในการทำงานขั้นตอนที่สอง n_2 วิธี เป็นเช่นนั้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งขั้นตอนที่ k ทำได้ n_k วิธี จะมีการทำงานชิ้นนี้จนสำเร็จทั้งหมดได้ $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ วิธี

2. จำนวนฟังก์ชัน

ในบทความวิจัยนี้ สัญลักษณ์ $|X|$ หมายถึงจำนวนสมาชิกของเซต X

ทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ โดยที่ $|A| = m$ และ $|B| = n$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่าจำนวนฟังก์ชันทั้งหมดจาก A ไปยัง B เท่ากับ n^m

ทฤษฎีบท 2 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ โดยที่ $|A| = |B| = n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่าจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B เท่ากับ $n!$

3. ฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูล

ให้ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X แล้วจะมีผลแบ่งกั้นของ X ที่ก่อกำเนิดโดย E (partition of X generated by E) เขียนแทนด้วย X/E

ในบทความวิจัยนี้จะให้ $|X/E| = n \in \mathbb{Z}^+$ และสามารถเขียน $X/E = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$

นั่นคือเราสามารถเขียน $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ โดยที่ $X_i \cap X_j = \varnothing$ สำหรับทุก $i \neq j$

ทฤษฎีบท 3 (Theorem 1.4) (Deng, Zeng & You, 2011)

(1) ถ้า $|X/E| = n$ (n เป็นจำนวนเต็มบวก) แล้ว $T_{E^*}(X) = T_{\exists}(X)$

(2) $E = X \times X$ ก็ต่อเมื่อ $T_{\exists}(X) = T(X)$

ทฤษฎีบท 4 (Theorem 1.3) (Deng, Zeng & Xu, 2010)

$E = X \times X$ ก็ต่อเมื่อ $T_{E^*}(X) = T(X)$

ข้อสังเกต 1 ถ้า $E = X \times X$ แล้วจะเห็นได้ว่า $T_E(X) = T(X)$ เช่นกัน

ตัวอย่าง ให้ $X = \{1\} \cup \{2,3,4\} \cup \{5,6\}$

ดังนั้นความสัมพันธ์สมมูล E ที่ก่อกำเนิดโดยผลแบ่งกั้น $\{\{1\},\{2,3,4\},\{5,6\}\}$ คือ

$$E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),(2,4),(3,4),(3,2),(4,2),(4,3),(5,6),(6,5)\}$$

จะเห็นว่า $f = \begin{pmatrix} 1 & \{2,3\} & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ เป็นฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูล

และ $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \{3,4\} & \{5,6\} \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูล เพราะ

$(2,4)\in E$ แต่ $(g(2),g(4))=(1,2)\notin E$

ดังนั้น $f\in T_E(X)$ และ $g\notin T_E(X)$

สำหรับ $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & \{2,3\} & 4 & \{5,6\} \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ เป็นฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูล 2 ทิศทาง

และ $\beta=\begin{pmatrix} 1 & \{2,3,4\} & \{5,6\} \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูล 2 ทิศทาง เพราะ

$(\beta(1),\beta(2))=(5,6)\in E$ แต่ $(1,2)\notin E$

ดังนั้น $\alpha\in T_{E^*}(X)=T_{\exists}(X)$ และ $\beta\notin T_{E^*}(X)=T_{\exists}(X)$

ผลการวิจัย

ในบทความวิจัยนี้ จะกำหนดให้ X เป็นเซตจำกัด และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X ซึ่ง $|X/E|=n$ เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะเขียน $X=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n$ โดยที่ $X_i\cap X_j=\varnothing$ สำหรับทุก $i\neq j$ และให้ $|X_i|=m_i$ เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $1\leq i\leq n$

เพราะฉะนั้น $X/E=\{X_1,X_2,...,X_n\}$ และ $|X|=|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_n|=\sum_{i=1}^{n}m_i$

1. จำนวนสมาชิกของกึ่งกรุปการแปลง $T_E(X)$

ทฤษฎีบท 1.1 $|T_E(X)|=\sum_{i=1}^{n^n}\left(\prod_{k=1}^{n}(\tau_i(m_k))^{m_k}\right)$

เมื่อ $\tau_i:\{m_1,m_2,...,m_n\}\rightarrow\{m_1,m_2,...,m_n\}$ สำหรับ $1\leq i\leq n^n$

การพิสูจน์ จาก $X=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n$ จะสามารถสร้างฟังก์ชันจาก X/E ไป X/E ได้ n^n ฟังก์ชัน (โดยทฤษฎีบท 1) ซึ่งสมนัยกับฟังก์ชันจาก $\{m_1,m_2,...,m_n\}$ ไป $\{m_1,m_2,...,m_n\}$

ให้ $\tau_i:\{m_1,m_2,...,m_n\}\rightarrow\{m_1,m_2,...,m_n\}$ เมื่อ $1\leq i\leq n^n$

เราสามารถเขียน τ_i ได้ดังนี้

$$\tau_1=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \tau_1(m_1) & \tau_1(m_2) & \cdots & \tau_1(m_n) \end{pmatrix}$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \tau_2(m_1) & \tau_2(m_2) & \cdots & \tau_2(m_n) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\tau_{n^n} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \tau_{n^n}(m_1) & \tau_{n^n}(m_2) & \cdots & \tau_{n^n}(m_n) \end{pmatrix}$$

ในกรณีที่ $i = 1$ โดยหลักการนับเบื้องต้นและทฤษฎีบท 1 จะมีจำนวนฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูลจาก X ไป X เท่ากับ

$$(\tau_1(m_1))^{m_1}(\tau_1(m_2))^{m_2} \cdots (\tau_1(m_n))^{m_n} = \prod_{k=1}^{n}(\tau_1(m_k))^{m_k}$$

ในกรณีที่ $i = 2$ โดยหลักการนับเบื้องต้นและทฤษฎีบท 1 จะมีจำนวนฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูลจาก X ไป X เท่ากับ

$$(\tau_2(m_1))^{m_1}(\tau_2(m_2))^{m_2} \cdots (\tau_2(m_n))^{m_n} = \prod_{k=1}^{n}(\tau_2(m_k))^{m_k}$$

$$\vdots$$

ในกรณีที่ $i = n^n$ โดยหลักการนับเบื้องต้นและทฤษฎีบท 1 จะมีจำนวนฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูลจาก X ไป X เท่ากับ

$$(\tau_{n^n}(m_1))^{m_1}(\tau_{n^n}(m_2))^{m_2} \cdots (\tau_{n^n}(m_n))^{m_n} = \prod_{k=1}^{n}(\tau_{n^n}(m_k))^{m_k}$$

ดังนั้นโดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้

$$|T_E(X)| = \prod_{k=1}^{n}(\tau_1(m_k))^{m_k} + \prod_{k=1}^{n}(\tau_2(m_k))^{m_k} + \cdots + \prod_{k=1}^{n}(\tau_{n^n}(m_k))^{m_k} = \sum_{i=1}^{n^n}\left(\prod_{k=1}^{n}(\tau_i(m_k))^{m_k}\right) \quad \square$$

สูตรการนับจำนวนสมาชิกของกึ่งกรุป $T_E(X)$ ในทฤษฎีบท 1.1 อาจจะใช้ได้ยาก เพราะขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน $\tau_i : \{m_1, m_2, ..., m_n\} \to \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ ว่าสามารถเขียนภาพ (image) ของ τ_i ได้ทั้งหมดกี่แบบ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นการหาสูตรของ $|T_E(X)|$ อีกวิธีหนึ่ง ที่สามารถนำมาใช้ได้ง่ายกว่าสูตรในทฤษฎีบท 1.1

ทฤษฎีบท 1.2 $|T_E(X)| = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j^{\,m_i}\right)$

การพิสูจน์ ขั้นที่ 1 m_1 สามารถจับกับ m_1 หรือ m_2 หรือ … หรือ m_n ก็ได้

โดยทฤษฎีบท 1 และ หลักการนับเบื้องต้นจะได้ $m_1^{\,m_1} + m_2^{\,m_1} + \cdots + m_n^{\,m_1} = \sum_{j=1}^{n} m_j^{\,m_1}$ วิธี

ขั้นที่ 2 m_2 สามารถจับกับ m_1 หรือ m_2 หรือ … หรือ m_n ก็ได้

โดยทฤษฎีบท 1 และ หลักการนับเบื้องต้นจะได้ $m_1^{\,m_2} + m_2^{\,m_2} + \cdots + m_n^{\,m_2} = \sum_{j=1}^{n} m_j^{\,m_2}$ วิธี

$$\vdots$$

ขั้นที่ n m_n สามารถจับกับ m_1 หรือ m_2 หรือ … หรือ m_n ก็ได้

โดยทฤษฎีบท 1 และ หลักการนับเบื้องต้นจะได้ $m_1^{m_n} + m_2^{m_n} + \cdots + m_n^{m_n} = \sum_{j=1}^{n} m_j^{m_n}$ วิธี

ดังนั้น $|T_E(X)| = \left(\sum_{j=1}^{n} m_j^{m_1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} m_j^{m_2}\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n} m_j^{m_n}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j^{m_i}\right)$ □

ตัวอย่างที่ 1.1 ให้ $X = \{1\} \cup \{2,3,4\} \cup \{5,6\}$ จะได้ $m_1 = 1,\ m_2 = 3$ และ $m_3 = 2$ โดยทฤษฎีบท 1.2 จะได้

$$\begin{aligned} |T_E(X)| &= (m_1^{m_1} + m_2^{m_1} + m_3^{m_1})(m_1^{m_2} + m_2^{m_2} + m_3^{m_2})(m_1^{m_3} + m_2^{m_3} + m_3^{m_3}) \\ &= (1^1 + 3^1 + 2^1)(1^3 + 3^3 + 2^3)(1^2 + 3^2 + 2^2) \\ &= (6)(36)(14) = 3{,}024 \text{ ฟังก์ชัน} \end{aligned}$$

บทแทรก 1.3 ถ้า $|X_1| = |X_2| = \cdots = |X_n| = m$ แล้ว $|T_E(X)| = n^n m^{mn}$

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1.2 จะได้

$$\begin{aligned} |T_E(X)| &= \underbrace{\left(\underbrace{(m^m + m^m + \cdots + m^m)}_{n}\underbrace{(m^m + m^m + \cdots + m^m)}_{n}\underbrace{(m^m + m^m + \cdots + m^m)}_{n}\right)}_{n} \\ &= \underbrace{(nm^m)(nm^m)\cdots(nm^m)}_{n} = (nm^m)^n = n^n m^{mn} \end{aligned}$$ □

บทแทรก 1.4 ถ้า $E = X \times X$ และ $|X| = m$ แล้ว $|T_E(X)| = |T(X)| = m^m$

การพิสูจน์ เนื่องจาก $E = X \times X$ จะได้ว่า $X/E = \{X\}$ นั่นคือ $|X/E| = n = 1$ เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $m_1 = m$ และโดยข้อสังเกต 1 จะได้ $T_E(X) = T(X)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.2 จะได้

$$|T(X)| = |T_E(X)| = \prod_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{1} m_j^{m_i}\right) = m_1^{m_1} = m^m$$ □

2. จำนวนสมาชิกของกึ่งกรุปการแปลง $T_{\exists}(X)$ และ $T_{E^*}(X)$

เนื่องจาก $|X/E| = n$ (n เป็นจำนวนเต็มบวก) โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $T_{E^*}(X) = T_{\exists}(X)$ นั่นคือ $|T_{E^*}(X)| = |T_{\exists}(X)|$ ดังนั้นเราจะนับจำนวนสมาชิกของ $T_{E^*}(X)$ เท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.1 $|T_{\exists}(X)| = |T_{E^*}(X)| = \sum_{i=1}^{n!}\left(\prod_{k=1}^{n}(\sigma_i(m_k))^{m_k}\right)$

เมื่อ $\sigma_i : \{m_1, m_2, ..., m_n\} \xrightarrow[onto]{1-1} \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ สำหรับ $1 \leq i \leq n!$

การพิสูจน์ จาก $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ จะสามารถสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก X / E ไปทั่วถึง X / E ได้ $n!$ ฟังก์ชัน (โดยทฤษฎีบท 2) ซึ่งสมนัยกับฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ ไปทั่วถึง $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$

ให้ $\sigma_i : \{m_1, m_2, ..., m_n\} \xrightarrow[onto]{1-1} \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ เมื่อ $1 \leq i \leq n!$

เราสามารถเขียน σ_i ได้ดังนี้

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \sigma_1(m_1) & \sigma_1(m_2) & \cdots & \sigma_1(m_n) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \sigma_2(m_1) & \sigma_2(m_2) & \cdots & \sigma_2(m_n) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{n!} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \sigma_{n!}(m_1) & \sigma_{n!}(m_2) & \cdots & \sigma_{n!}(m_n) \end{pmatrix}$$

ในกรณีที่ $i = 1$ โดยหลักการนับเบื้องต้นและทฤษฎีบท 1 จะมีจำนวนฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูลสองทิศทางจาก X ไป X เท่ากับ $(\sigma_1(m_1))^{m_1}(\sigma_1(m_2))^{m_2} \cdots (\sigma_1(m_n))^{m_n} = \prod_{k=1}^{n}(\sigma_1(m_k))^{m_k}$

ในกรณีที่ $i = 2$ โดยหลักการนับเบื้องต้นและทฤษฎีบท 1 จะมีจำนวนฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูลสองทิศทางจาก X ไป X เท่ากับ $(\sigma_2(m_1))^{m_1}(\sigma_2(m_2))^{m_2} \cdots (\sigma_2(m_n))^{m_n} = \prod_{k=1}^{n}(\sigma_2(m_k))^{m_k}$

$$\vdots$$

ในกรณีที่ $i = n!$ โดยหลักการนับเบื้องต้นและทฤษฎีบท 1 จะมีจำนวนฟังก์ชันที่คงสภาพการสมมูลสองทิศทางจาก X ไป X เท่ากับ $(\sigma_{n!}(m_1))^{m_1}(\sigma_{n!}(m_2))^{m_2} \cdots (\sigma_{n!}(m_n))^{m_n} = \prod_{k=1}^{n}(\sigma_{n!}(m_k))^{m_k}$

ดังนั้นโดยหลักการนับเบื้องต้น จะได้

$$|T_{E^*}(X)| = \prod_{k=1}^{n}(\sigma_1(m_k))^{m_k} + \prod_{k=1}^{n}(\sigma_2(m_k))^{m_k} + \cdots + \prod_{k=1}^{n}(\sigma_{n!}(m_k))^{m_k} = \sum_{i=1}^{n!}\left(\prod_{k=1}^{n}(\sigma_i(m_k))^{m_k}\right) \square$$

ตัวอย่างที่ 2.1 ให้ $X = \{1\} \cup \{2,3,4\} \cup \{5,6\}$ จะได้ $m_1 = 1,\ m_2 = 3$ และ $m_3 = 2$ สามารถสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\{1,3,2\}$ ไปทั่วถึง $\{1,3,2\}$ ได้ทั้งหมด $3! = 6$ ฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \sigma_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad \sigma_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้

$$\begin{aligned}|T_{E^*}(X)| &= \prod_{k=1}^{3}(\sigma_1(m_k))^{m_k}+\prod_{k=1}^{3}(\sigma_2(m_k))^{m_k}+\cdots+\prod_{k=1}^{3}(\sigma_6(m_k))^{m_k}\\
&= \left((\sigma_1(1))^1(\sigma_1(2))^2(\sigma_1(3))^3\right)+\left((\sigma_2(1))^1(\sigma_2(2))^2(\sigma_2(3))^3\right)+\cdots+\left((\sigma_6(1))^1(\sigma_6(2))^2(\sigma_6(3))^3\right)\\
&= (1^1\times 2^2\times 3^3)+(1^1\times 3^2\times 2^3)+(2^1\times 1^2\times 3^3)+(2^1\times 3^2\times 1^3)+(3^1\times 1^2\times 2^3)\\
&\quad +(3^1\times 2^2\times 1^3)\\
&= 108+72+54+18+24+12 = 288 \text{ ฟังก์ชัน}\end{aligned}$$

บทแทรก 2.2 ถ้า $|X_1|=|X_2|=\cdots=|X_n|=m$ แล้ว $|T_{E^*}(X)|=n!m^{mn}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $|X_1|=|X_2|=\cdots=|X_n|=m$

ดังนั้น $m_1=m_2=\cdots=m_n=m$ และโดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้

$$\begin{aligned}|T_{E^*}(X)| &= \underbrace{\left[(\sigma_1(m))^m(\sigma_1(m))^m\cdots(\sigma_1(m))^m\right]}_{n}+\underbrace{\left[(\sigma_2(m))^m(\sigma_2(m))^m\cdots(\sigma_2(m))^m\right]}_{n}\\
&\quad +\cdots+\underbrace{\left[(\sigma_{n!}(m))^m(\sigma_{n!}(m))^m\cdots(\sigma_{n!}(m))^m\right]}_{n}\\
&= \underbrace{\underbrace{\left(m^m m^m\cdots m^m\right)}_{n}+\underbrace{\left(m^m m^m\cdots m^m\right)}_{n}+\cdots+\underbrace{\left(m^m m^m\cdots m^m\right)}_{n}}_{n!}\\
&= \underbrace{\left(m^m\right)^n+\left(m^m\right)^n+\cdots+\left(m^m\right)^n}_{n!}\\
&= n!m^{mn}\end{aligned}$$

□

บทแทรก 2.3 ถ้า $E=X\times X$ และ $|X|=m$ แล้ว $|T_\exists(X)|=|T_{E^*}(X)|=|T(X)|=m^m$

การพิสูจน์ เนื่องจาก $E=X\times X$ จะได้ว่า $X/E=\{X\}$ นั่นคือ $|X/E|=n=1$ เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $m_1=m$ โดยข้อสังเกต 1 และ ทฤษฎีบท 3 จะได้ $T_\exists(X)=T_{E^*}(X)=T(X)$ นั่นคือ $|T_\exists(X)|=|T_{E^*}(X)|=|T(X)|$

ดังนั้นโดยบทแทรก 2.2 จะได้ $|T_{E^*}(X)| = n!m^{mn} = 1!m^{m\times 1} = m^m$

จึงได้ว่า $|T_{\exists}(X)| = |T_{E^*}(X)| = |T(X)| = m^m$ □

อภิปรายผล

การนับจำนวนสมาชิกของกึ่งกรุปการแปลง $T_E(X), T_{\exists}(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ ที่ได้นิยามไว้ข้างต้นเป็นการศึกษาสมบัติเชิงการจัด (combinatorial property) เบื้องต้นเท่านั้น ผู้อ่านยังสามารถ นับจำนวนสมาชิกนิจพล (idempotent) หรือนับจำนวนชั้นสมมูล L และ R ใน $T_E(X), T_{\exists}(X)$ และ $T_{E^*}(X)$ เป็นต้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ที่ให้โอกาสในการทำวิจัยและสนับสนุนการตีพิมพ์บทความวิจัยในครั้งนี้ เป็นอย่างสูง

เอกสารอ้างอิง

Deng, L.-Z., Zeng, J.-W. & Xu, B. (2010, June). Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve double direction equivalence. **Semigroup Forum**, **80**(3), 416-425.

Deng, L.-Z., Zeng, J.-W. & You, T.-J. (2011, December). Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve reverse direction equivalence. **Semigroup Forum**, **83**(3), 489-498.

Pei, H. (2005). Regularity and Green's relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence. **Communications in Algebra**, **33**(1), 109-118.