สักทอง : วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สทวท.)

ปีที่ 6 ฉบับที่ 1 มกราคม - มิถุนายน 2562

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ ในรูปแบบ (1) $\frac{1}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}+\ldots+\frac{2k-1}{x_k}=1$ และ (2) $\frac{2}{x_1}+\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}+\ldots+\frac{2k}{x_k}=1$

Solutions of the Diophantine equation (1) $\frac{1}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}+\ldots+\frac{2k-1}{x_k}=1$ and (2) $\frac{2}{x_1}+\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}+\ldots+\frac{2k}{x_k}=1$

ปวีณา ถ้ำแก้ว*

Paweena Thamkaew

พรสุดา กาหมี**

Pornsuda Kameeh

ปวริศ มณีเหล็ก**

Pavarit Maneelek

ศิรประภา วงค์หมูคำ**

Siraprapa Wongmookham

Received : November 22, 2018

Revised : April 19, 2019

Accepted : April 27, 2019

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราได้ทำการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ใน 2 รูปแบบ ได้แก่ (1) $\frac{1}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}+\ldots+\frac{2k-1}{x_k}=1$ และ (2) $\frac{2}{x_1}+\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}+\ldots+\frac{2k}{x_k}=1$ เมื่อ $2 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $k = x_1$ โดยผลการวิจัยพบว่า สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ (1) เมื่อ $x_1 = 2$ และ $x_1 = 3$ จะมีผลเฉลย 1 คำตอบ และ 4 คำตอบ ตามลำดับ และเมื่อ $x_1 \ge 4$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 4 คำตอบ และสำหรับสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบ (2) เมื่อ $x_1 = 2$ และ $x_1 = 3$ จะมีผลเฉลย 1 คำตอบ และ 8 คำตอบ ตามลำดับ เมื่อ $x_1 = 4$ และ $x_1 \ge 5$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 2 คำตอบ และ อย่างน้อย 4 คำตอบ ตามลำดับ

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ / เศษส่วนอียิปต์

*อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่
Department of Mathematics and Statistics Faculty of Science and Technology Chiang Mai Rajabhat University

**นักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่
Mathematics students Faculty of Science and Technology Chiang Mai Rajabhat University

ABSTRACT

In this research we describe solutions of 2 types of the Diophantine equation on the following from:
(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}+\ldots+\frac{2k-1}{x_k}=1$ and (2) $\frac{2}{x_1}+\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}+\ldots+\frac{2k}{x_k}=1$ when $2\le x_1<x_2<\ldots<x_k$ are positive integers and $k=x_1$ The research found that, For Diophantine equation of type (1) when $x_1=2$ and $x_1=3$ this equation has one solution and four solutions respectively, and when $x_1\ge 4$ this equation has at least four general solutions. For Diophantine equation of type (2) when $x_1=2$ and $x_1=3$ this equation has one solution and eight solution respectively, when $x_1=4$ and $x_1\ge 5$ this equation has at least two general solutions and at least four general solutions respectively.

Keywords : Diophantine Equation / Egyptian Fractions

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการที่มีตัวแปรหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวและมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม มีการศึกษาในหลายรูปแบบ เช่น สมการสามจำนวนของพีทาโกรัส $x^2+y^2=z^2$ เป็นต้นสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูปเศษส่วนเป็นสมการรูปแบบหนึ่งที่มีความน่าสนใจและมีการศึกษาสมการในรูปแบบนี้ เช่น Arce-Nazario, R., Castro, F. & Figueroa, R. (2013) ได้ศึกษาหาจำนวนผลเฉลยของ $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_1}=1$ ในรูปของจำนวนนับคี่ที่แตกต่างกัน เมื่อ $k=11$ และใน Croot III, E.S., et al. (2000); Hofmeister, G., & Stoll, P., (1985)

ได้กล่าวถึงทฤษฎีที่น่าสนใจเกี่ยวกับเศษส่วนอียิปต์ ซึ่งมีประโยชน์ต่อการนำไปใช้ในการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูปเศษส่วน

บทความวิจัยของ Burshtein, N. (2017) ได้ศึกษาและแสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ

$$\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{3}{x_3}+\ldots+\frac{k}{x_k}=1 \qquad (1)$$

เมื่อ $2\le x_1<x_2<\ldots<x_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $k=x_1$ โดยได้แสดงว่า ในกรณีเมื่อ $x_1=2$ สมการไดโอแฟนไทน์มีผลเฉลยเดียว เมื่อ $x_1=3$ สมการไดโอแฟนไทน์มีเพียงสองผลเฉลย เมื่อ $x_1=4$ สมการไดโอแฟนไทน์มีเพียงสิบผลเฉลย และในกรณีเมื่อ $x_1\ge 4$ สมการไดโอแฟนไทน์มีผลเฉลยอย่างน้อยสี่ผลเฉลย

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีการคำนวณการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ (1) ภายใต้เงื่อนไขเดียวกับงานวิจัยของ Burshtein, N. (2017) โดยพิจารณาสมการ (1) ในรูปแบบที่ตัวเศษเป็นจำนวนเต็มบวกคี่

$$\frac{1}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}+\ldots+\frac{2k-1}{x_k}=1 \qquad (2)$$

และในรูปแบบที่ตัวเศษเป็นจำนวนเต็มบวกคู่

$$\frac{2}{x_1}+\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}+...+\frac{2k}{x_k}=1 \qquad (3)$$

เมื่อ $2 \le x_1 < x_2 < ... < x_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $k = x_1$ ซึ่งผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยของสมการ (2) เป็น 2 หมวด คือ หมวดที่ 1 หาจำนวนผลเฉลยเมื่อ $x_1 = 2$ และ 3 และหมวดที่ 2 การหาผลเฉลยทั่วไปบางส่วนในกรณีเมื่อ $x_1 \ge 4$ ซึ่งการหาผลเฉลยในหมวดแรกใช้วิธีพีชคณิตแทนค่าในสมการ ส่วนการหาผลเฉลยในหมวดที่ 2 จะอาศัยเศษส่วนอียิปต์ (Croot III, E.S., et al., 2000) และแนวคิดเช่นเดียวกับงานวิจัยของ Burshtein, N. (2017) สำหรับการหาผลเฉลยของสมการ (3) มีแนวคิดในทำนองเดียวกัน

การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ทำการพิสูจน์หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ (2) และ (3) ทั้งนี้รูปแบบผลเฉลยที่ได้จะอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้เพื่อช่วยในการจัดรูปของผลเฉลยทั่วไป

ทฤษฎีบท 1 (Arce-Nazario, R., Castro, F. & Figueroa, R., 2013) สมบัติเอกลักษณ์ของเศษส่วนอียิปต์

ถ้า M, N เป็นจำนวนเต็ม และ $M, N \ge 1$ แล้ว $\frac{1}{N}=\frac{1}{N+M}+\frac{M}{N(N+M)}$

ทฤษฎีบท 2 สมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}+...+\frac{2k-1}{x_k}=1 \qquad (2)$$

เมื่อ $2 \le x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_k$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $k = x_1$

จะได้ว่า (i) มีผลเฉลยเดียว ถ้า $x_1 = 2$

(ii) มีเพียงสี่ผลเฉลย ถ้า $x_1 = 3$

(iii) มีอย่างน้อยสี่ผลเฉลย ถ้า $x_1 \ge 4$

การพิสูจน์

(i) ถ้า $x_1 = 2$ พิจารณาสมการ (2) จะได้ว่า $\frac{1}{2}+\frac{3}{x_2}=1$ ดังนั้น $x_2 = 6$

ในกรณีนี้จึงสรุปได้ว่า สมการ (2) มีผลเฉลยเพียง 1 คำตอบ ซึ่งเมื่อแทน $x_2 = 6$ ลงใน (2) จะได้ว่า $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}=1$

(ii) ถ้า $x_1 = 3$ พิจารณา สมการ (2)

จะได้ว่า $\frac{1}{3}+\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}=1$ ดังนั้น $\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}=\frac{2}{3}$

เนื่องจาก $\frac{3}{12}+\frac{5}{13}<\frac{2}{3}$ ดังนั้นเมื่อ $x_2 \ge 12$ จะทำให้ค่าของ $\frac{3}{12}+\frac{5}{13}$ ยิ่งมีค่าน้อยกว่า $\frac{2}{3}$ แสดงว่าค่าของ x_2 ที่เป็นไปได้คือ $4 \le x_2 \le 11$ ซึ่งพบว่า $x_2 = 5, 6, 7$ และ 9 เท่านั้น ที่ทำให้ค่า x_3 เป็นจำนวน

เต็มบวก ในกรณีนี้จึงสรุปได้ว่า สมการ (2) จะมีผลเฉลยทั้งหมด 4 คำตอบ เมื่อแทน $x_2 = 5, 6, 7$ และ 9 ลงใน (2) ได้ว่า $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{75}=1,\ \frac{1}{3}+\frac{3}{6}+\frac{5}{30}=1,\ \frac{1}{3}+\frac{3}{7}+\frac{5}{21}=1$ และ $\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{15}=1$

(iii) ถ้า $x_1 \geq 4$ จะพบว่าเมื่อเราใช้วิธีการหาผลเฉลยเช่นเดียวกันกับกรณี $x_1 = 2,3$ จะมีผลเฉลยอยู่เป็นจำนวนมาก ดังนั้น กรณี $x_1 \geq 4$ เราจะทำการพิสูจน์หาเฉพาะผลเฉลยทั่วไปบางส่วนเท่านั้นซึ่งผลเฉลยทั่วไปบางส่วนของสมการ (2) ที่ได้มีดังนี้

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) แบบที่ 1

พิจารณาผลรวมของ $\frac{1}{x_1}$ จำนวน x_1 ตัว จะได้ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_1}=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3x_1}+\frac{5}{5x_1}+\ldots+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)x_1}\right]=1$$

เมื่อ $x_1 = x_1,\ x_2 = 3x_1,\ x_3 = 5x,\ \ldots,\ x_k = (2x_1-1)x_1$ ซึ่งทั้งหมดมีค่าแตกต่างกัน

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป (2) แบบที่ 1 คือ $\frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3x_1}+\ldots+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)x_1}\right]=1$ (4)

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) แบบที่ 2

จากทฤษฎีบท 1 เราจะกำหนดให้ $N = x_1$ และ $M = 1$ จะได้ $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_1(x_1+1)}$ แทนพจน์ $\frac{1}{x_1}$ ลงในสมการ (4) จะได้ $\frac{1}{x_1+1}+\left[\frac{3}{3x_1}+\ldots+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)x_1}\right]+\frac{1}{x_1(x_1+1)}=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1+1}+\left[\frac{3}{3x_1}+\ldots+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)x_1}\right]+\frac{2(x_1+1)-1}{(2x_1+1)x_1(x_1+1)}=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k = x_1$ เราจึงแทนค่า x_1 ด้วย $x_1 - 1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป (2) แบบที่ 2 คือ

$$\frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3(x_1-1)}+\ldots+\frac{2(x_1-1)-1}{(2x_1-3)(x_1-1)}\right]+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)(x_1-1)x_1}=1 \quad (5)$$

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) แบบที่ 3

จากทฤษฎีบท 1 เราจะกำหนดให้ $N = x_1$ และ $M = T$ โดยที่ $T = 2, 3, \ldots, 2x_1 - 1$ จะได้ $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1+T}+\frac{T}{x_1(x_1+T)}$ และแทนพจน์ $\frac{1}{x_1}$ ลงในสมการ (4) จะได้

$$\frac{1}{x_1+T}+\left[\frac{3}{3x_1}+\ldots+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)x_1}\right]+\frac{T}{x_1(x_1+T)}=1 \Rightarrow \frac{1}{x_1+T}+\left[\frac{3}{3x_1}+\ldots+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)x_1}\right]$$
$$+\left[\frac{2(x_1+1)-1}{(2x_1+1)x_1(x_1+T)}+\frac{2(x_1+2)-1}{(2x_1+3)x_1(x_1+T)}+\ldots+\frac{2(x_1+T)-1}{(2x_1+2T-1)x_1(x_1+T)}\right]=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k = x_1$ เราจึงแทนค่า x_1 ด้วย $x_1 - 2$, $T = 2$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป (2) แบบที่ 3 คือ

$$\frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3(x_1-2)}+...+\frac{2(x_1-2)-1}{(2x_1-5)(x_1-2)}\right]+\frac{2(x_1-1)-1}{(2x_1-3)(x_1-2)x_1}+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)(x_1-2)x_1}=1 \qquad (6)$$

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) แบบที่ 4

จากทฤษฎีบท 1 เราจะกำหนดให้ $N=x_1$ และ $M=1$ จะได้ $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_1(x_1+1)}$ และแทนพจน์ $\frac{1}{x_1}$ ลงในสมการ (5) จะได้

$$\frac{1}{x_1+1}+\left[\frac{3}{3(x_1-1)}+...+\frac{2(x_1-1)-1}{(2x_1-3)(x_1-1)}\right]+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)(x_1-1)x_1}+\frac{1}{x_1(x_1+1)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1+1}+\left[\frac{3}{3(x_1-1)}+...+\frac{2(x_1-1)-1}{(2x_1-3)(x_1-1)}\right]+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)(x_1-1)x_1}+\frac{2(x_1+1)-1}{(2x_1+1)x_1(x_1+1)}=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k=x_1$ เราจึงแทนค่า x_1 ด้วย x_1-1

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป (2) แบบที่ 4 คือ

$$\frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3(x_1-2)}+...+\frac{2(x_1-2)-1}{(2x_1-5)(x_1-2)}\right]+\frac{2(x_1-1)-1}{(2x_1-3)(x_1-2)(x_1-1)}+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)(x_1-1)x_1}=1 \qquad (7)$$

สรุปได้ว่า ถ้า $x_1 \geq 4$ สมการ (2) จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 4 คำตอบดังสมการ (4), (5), (6) และ (7)

ทฤษฎีบท 3 สมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{2}{x_1}+\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}+...+\frac{2k}{x_k}=1 \qquad (3)$$

เมื่อ $3 \leq x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_k$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $k=x_1$

จะได้ว่า (i) มีผลเฉลยเดียว ถ้า $x_1=2$

(ii) มีเพียงแปดผลเฉลย ถ้า $x_1=3$

(iii) มีอย่างน้อยสองผลเฉลย ถ้า $x_1=4$

(iv) มีอย่างน้อยสี่ผลเฉลย ถ้า $x_1 \geq 5$

การพิสูจน์

(i) ถ้า $x_1=2$ จะเห็นได้ชัดว่าสมการ (3) จะมีเพียง 1 คำตอบ ซึ่งได้ว่า $\frac{2}{2}=1$

(ii) ถ้า $x_1=3$ พิจารณาสมการ (3) จะได้ว่า $\frac{2}{3}+\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}=1$ ดังนั้น $\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}=\frac{1}{3}$

เนื่องจาก $\frac{4}{31}+\frac{6}{32}<\frac{1}{3}$ ดังนั้นเมื่อ $x_2 \geq 31$ จะทำให้ค่าของ $\frac{4}{31}+\frac{6}{32}$ ยิ่งมีค่าน้อยกว่า $\frac{1}{3}$ แสดงว่าค่าของ x_2 ที่เป็นไปได้คือ $4 \leq x_2 \leq 30$ แต่เนื่องจาก $4 \leq x_2 \leq 11$ ทำให้ $\frac{4}{x_2}>\frac{1}{3}$ ดังนั้น $12 \leq x_2 \leq 30$ ซึ่งพบว่า $x_2=13, 14, 15, 16, 18, 20, 21$ และ 24 เท่านั้น ที่ทำให้ค่า x_3 เป็นจำนวนเต็มบวก ในกรณีนี้จึงสรุป

ได้ว่า สมการ (3) จะมีผลเฉลยทั้งหมด 8 คำตอบ โดยที่เมื่อแทน x_2 แต่ละตัวลงใน (3) ได้ว่า

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{13}+\frac{6}{234}=1,\ \frac{2}{3}+\frac{4}{14}+\frac{6}{126}=1,\ \frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{6}{90}=1,\ \frac{2}{3}+\frac{4}{16}+\frac{6}{72}=1,$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{18}+\frac{6}{54}=1,\ \frac{2}{3}+\frac{4}{20}+\frac{6}{45}=1,\ \frac{2}{3}+\frac{4}{21}+\frac{6}{42}=1 \text{ และ } \frac{2}{3}+\frac{4}{24}+\frac{6}{36}=1$$

(iii) และ (iv) ถ้า $x_1 \geq 4$ จะพบว่าเมื่อเราใช้วิธีการหาผลเฉลยเช่นเดียวกันกับกรณี $x_1 = 2,3$ จะมีผลเฉลยอยู่เป็นจำนวนมาก ดังนั้น กรณี $x_1 \geq 4$ เราจะทำการพิสูจน์หาเฉพาะผลเฉลยทั่วไปบางส่วนเท่านั้น ซึ่งผลเฉลยทั่วไปบางส่วนของสมการ (3) ที่ได้มีดังนี้

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) แบบที่ 1

พิจารณาผลรวมของ $\frac{1}{x_1}$ จำนวน x_1 ตัว จะได้ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_1}\right]}_{x_1-3 \text{ ตัว}}=1$

$$\Rightarrow \frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_1}\right]}_{x_1-3 \text{ ตัว}}+\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4x_1}+\frac{6}{6x_1}+\ldots+\frac{2(x_1-2)}{(2x_1-4)x_1}\right]}_{x_1-3 \text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}=1$$

เมื่อ $x_1=x_1, x_2=4x_1, x_3=6x_1, \ldots, x_{k-2}=(2x_1-4)x_1, x_{k-1}=(4x_1-4)x_1, x_k=4x_1\cdot x_1$ ซึ่งทั้งหมดมีค่าแตกต่างกัน

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป (3) แบบที่ 1 คือ $\frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4x_1}+\ldots+\frac{2(x_1-2)}{(2x_1-4)x_1}\right]}_{x_1-3 \text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}=1$ (8)

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) แบบที่ 2

จากทฤษฎีบท 1 เราจะกำหนดให้ $N=x_1$ และ $M=1$ จะได้ $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_1(x_1+1)}$

$\Rightarrow \frac{2}{x_1}=\frac{2}{x_1+1}+\frac{2}{x_1(x_1+1)}$ และแทนพจน์ $\frac{2}{x_1}$ ลงในสมการ (8) จะได้

$$\frac{2}{x_1+1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4x_1}+\ldots+\frac{2(x_1-2)}{(2x_1-4)x_1}\right]}_{x_1-3 \text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}+\frac{2}{x_1(x_1+1)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x_1+1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4x_1}+\ldots+\frac{2(x_1-2)}{(2x_1-4)x_1}\right]}_{x_1-3 \text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}+\frac{2(x_1+1)}{(x_1+1)x_1(x_1+1)}=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k=x_1$ เราจึงแทนค่า x_1 ด้วย x_1-1

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป (3) แบบที่ 2 คือ

$$\frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4(x_1-1)}+\ldots+\frac{2(x_1-3)}{(2x_1-6)(x_1-1)}\right]}_{x_1-4\ \text{ตัว}}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-1)}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)(x_1-1)}+\frac{2x_1}{x_1(x_1-1)x_1}=1 \qquad (9)$$

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) แบบที่ 3

จากทฤษฎีบท 1 เราจะกำหนดให้ $N=x_1$ และ $M=T$ โดยที่ $T=2,3,\ldots,3x_1-1$ จะได้

$$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1+T}+\frac{T}{x_1(x_1+T)}$$

$\Rightarrow \dfrac{2}{x_1}=\dfrac{2}{x_1+T}+\dfrac{2T}{x_1(x_1+T)}$ และแทนพจน์ $\dfrac{2}{x_1}$ ลงในสมการ (8) จะได้

$$\frac{2}{x_1+T}+\underbrace{\left[\frac{4}{4x_1}+\ldots+\frac{2(x_1-2)}{(2x_1-4)x_1}\right]}_{x_1-3\ \text{ตัว}}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}+\frac{2T}{x_1(x_1+T)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x_1+T}+\underbrace{\left[\frac{4}{4x_1}+\ldots+\frac{2(x_1-2)}{(2x_1-4)x_1}\right]}_{x_1-3\ \text{ตัว}}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}$$

$$+\left[\frac{2(x_1+1)}{(x_1+1)x_1(x_1+T)}+\frac{2(x_1+2)}{(x_1+2)x_1(x_1+T)}+\ldots+\frac{2(x_1+T)}{(x_1+T)x_1(x_1+T)}\right]=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k=x_1$ เราจึงแทนค่า x_1 ด้วย x_1-2 , $T=2$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป (3) แบบที่ 3 คือ

$$\frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4(x_1-2)}+\ldots+\frac{2(x_1-4)}{(2x_1-8)(x_1-2)}\right]}_{x_1-5\ \text{ตัว}}+\frac{2(x_1-3)}{(4x_1-12)(x_1-2)}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-2)}$$

$$+\frac{2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_1-2)x_1}+\frac{2x_1}{x_1(x_1-2)x_1}=1 \qquad (10)$$

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) แบบที่ 4

จากทฤษฎีบท 1 เราจะกำหนดให้ $N=x_1$ และ $M=1$ จะได้ $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_1(x_1+1)}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{x_1}=\dfrac{2}{x_1+1}+\dfrac{2}{x_1(x_1+1)}$ และแทนพจน์ $\dfrac{2}{x_1}$ ลงในสมการ (9) จะได้

$$\frac{2}{x_1+1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4(x_1-1)}+\ldots+\frac{2(x_1-3)}{(2x_1-6)(x_1-1)}\right]}_{x_1-4\ \text{ตัว}}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-1)}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)(x_1-1)}$$

$$+\frac{2x_1}{x_1(x_1-1)x_1}+\frac{2}{x_1(x_1+1)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x_1+1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4(x_1-1)}+\ldots+\frac{2(x_1-3)}{(2x_1-6)(x_1-1)}\right]}_{x_1-4 \text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-1)}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)(x_1-1)}$$

$$+\frac{2x_1}{x_1(x_1-1)x_1}+\frac{2(x_1+1)}{(x_1+1)x_1(x_1+1)}=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k=x_1$ เราจึงแทนค่า x_1 ด้วย x_1-1

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป (3) แบบที่ 4 คือ

$$\frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4(x_1-2)}+\ldots+\frac{2(x_1-4)}{(2x_1-8)(x_1-2)}\right]}_{x_1-5 \text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-3)}{(4x_1-12)(x_1-2)}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-2)}$$

$$+\frac{2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_1-2)(x_1-1)}+\frac{2x_1}{x_1(x_1-1)x_1}=1 \qquad (11)$$

เมื่อพิจารณาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) ทั้ง 4 แบบ จะเห็นได้ว่า เมื่อ $x_1=4$ จะมีเพียงสมการผลเฉลยแบบที่ 1 และ 2 เท่านั้นที่เป็นจริง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เมื่อ $x_1=4$ สมการ (3) จะมีผลเฉลยทั่วไปบางส่วนอย่างน้อย 2 คำตอบ ได้แก่

$$\frac{2}{x_1}+\frac{4}{4x_1}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}=1$$

และ $\frac{2}{x_1}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-1)}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)(x_1-1)}+\frac{2x_1}{x_1(x_1-1)x_1}=1$

และเมื่อ $x_1 \geq 5$ สมการ (3) จะมีผลเฉลยทั่วไปบางส่วนอย่างน้อย 4 คำตอบ ดังสมการ (8), (9), (10) และ (11)

สรุป

สำหรับผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ (2) ถ้า $x_1=2$ จะมีผลเฉลยเดียว คือ $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}=1$ ถ้า $x_1=3$ จะมีเพียงสี่ผลเฉลย ได้แก่ $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{75}=1, \frac{1}{3}+\frac{3}{6}+\frac{5}{30}=1, \frac{1}{3}+\frac{3}{7}+\frac{5}{21}=1$ และ $\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{15}=1$ และถ้า $x_1 \geq 4$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 4 คำตอบ ได้แก่

ผลเฉลยทั่วไปแบบที่ 1 $\frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3x_1}+\ldots+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)x_1}\right]=1$

ผลเฉลยทั่วไปแบบที่ 2 $\frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3(x_1-1)}+\ldots+\frac{2(x_1-1)-1}{(2x_1-3)(x_1-1)}\right]+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)(x_1-1)x_1}=1$

ผลเฉลยทั่วไปแบบที่ 3

$$\frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3(x_1-2)}+\ldots+\frac{2(x_1-2)-1}{(2x_1-5)(x_1-2)}\right]+\frac{2(x_1-1)-1}{(2x_1-3)(x_1-2)x_1}+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)(x_1-2)x_1}=1$$

ผลเฉลยทั่วไปแบบที่ 4

$$\frac{1}{x_1}+\left[\frac{3}{3(x_1-2)}+\ldots+\frac{2(x_1-2)-1}{(2x_1-5)(x_1-2)}\right]+\frac{2(x_1-1)-1}{(2x_1-3)(x_1-2)(x_1-1)}+\frac{2x_1-1}{(2x_1-1)(x_1-1)x_1}=1$$

สำหรับผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ (3) ถ้า $x_1=2$ จะมีผลเฉลยเดียว คือ $\frac{2}{2}=1$ ถ้า $x_1=3$ จะมีเพียงแปดผลเฉลย ได้แก่ $\frac{2}{3}+\frac{4}{13}+\frac{6}{234}=1,$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{14}+\frac{6}{126}=1,$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{6}{90}=1,$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{16}+\frac{6}{72}=1,$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{18}+\frac{6}{54}=1,$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{20}+\frac{6}{45}=1,$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{21}+\frac{6}{42}=1$ และ $\frac{2}{3}+\frac{4}{24}+\frac{6}{36}=1$ ถ้า $x_1=4$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 2 คำตอบ ได้แก่ $\frac{2}{x_1}+\frac{4}{4x_1}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}=1,$

$$\frac{2}{x_1}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-1)}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)(x_1-1)}+\frac{2x_1}{x_1(x_1-1)x_1}=1$$

ถ้า $x_1\geq 5$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอย่างน้อย 4 คำตอบ ได้แก่

ผลเฉลยทั่วไปแบบที่ 1 $\frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4x_1}+\ldots+\frac{2(x_1-2)}{(2x_1-4)x_1}\right]}_{x_1-3\text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)x_1}+\frac{2x_1}{4x_1\cdot x_1}=1$

ผลเฉลยทั่วไปแบบที่ 2

$$\frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4(x_1-1)}+\ldots+\frac{2(x_1-3)}{(2x_1-6)(x_1-1)}\right]}_{x_1-4\text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-1)}+\frac{2(x_1-1)}{(4x_1-4)(x_1-1)}+\frac{2x_1}{x_1(x_1-1)x_1}=1$$

ผลเฉลยทั่วไปแบบที่ 3

$$\frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4(x_1-2)}+\ldots+\frac{2(x_1-4)}{(2x_1-8)(x_1-2)}\right]}_{x_1-5\text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-3)}{(4x_1-12)(x_1-2)}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-2)}+\frac{2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_1-2)x_1}$$
$$+\frac{2x_1}{x_1(x_1-2)x_1}=1$$

ผลเฉลยทั่วไปแบบที่ 4

$$\frac{2}{x_1}+\underbrace{\left[\frac{4}{4(x_1-2)}+\ldots+\frac{2(x_1-4)}{(2x_1-8)(x_1-2)}\right]}_{x_1-5\text{ ตัว}}+\frac{2(x_1-3)}{(4x_1-12)(x_1-2)}+\frac{2(x_1-2)}{(4x_1-8)(x_1-2)}+\frac{2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_1-2)(x_1-1)}$$
$$+\frac{2x_1}{x_1(x_1-1)x_1}=1$$

กิตติกรรมประกาศ (เพิ่ม)

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการวิจัย “ผลเฉลยสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{3}{x_3}+\ldots+\frac{k}{x_k}=1$ ” โดยได้รับทุนสนับสนุนจากกองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ในการสนับสนุนทุนวิจัยในครั้งนี้เป็นอย่างสูง

References

Arce-Nazario, R., Castro, F. & Figueroa, R. (2013). On the number of solutions of $\sum_{i=1}^{11} \frac{1}{x_1} = 1$ in distinct odd natural numbers. **Journal of Number Theory, 133**(6), 2036-2046.

Burshtein, N. (2017). On solutions of the Diophantine equation $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3} + ... + \frac{k}{x_k} = 1$ when $2 \leq x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_k$ are integers and $k = x_1$. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 2**, 30-35.

Croot III, E.S., et al. (2000). Binary Egyptian fractions. **Journal of Number Theory, 84**(1), 63-79.

Hofmeister, G. & Stoll, P. (1985). Note on Egyptian fractions. **J. reine angew. Math, 362**, 141-145.