Rajabhat Mathematics Journal (2020) Vol. 01, 23 - 34

ISSN 2465-5163

สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร

ปัฐยา มีสุข* และ นิรุตติ์ พิพรรธนจินดา

โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร กำแพงเพชร 62000

Abstract

สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{Z}^+$ และ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีอันดับ n จะเรียก G ว่าเป็นกราฟ k-วัฏจักร ถ้า G เป็นกราฟที่มีขนาดเป็น $m = n + k - 1$ ในงานวิจัยนี้จะเป็นการหาสูตรของจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร ด้วยการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกัน และการหาความสัมพันธ์ของจำนวนของต้นไม้แผ่ทั่วในกราฟ k-วัฏจักร กับ $(k-1)$-วัฏจักร

***Corresponding Author:** pad.padtaya@gmail.com

Keyword: ต้นไม้แผ่ทั่ว, 2-วัฏจักร, สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่ว

1 บทนำและความรู้พื้นฐาน

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องจาก [3] พบว่า การหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่ว ถูกค้นพบครั้งแรกโดย Carl wilhelm Borchard ในปี ค.ศ. 1860 และพิสูจน์โดยการใช้ดีเทอร์มิแนนท์ ต่อมาในปี ค.ศ. 1889 [4] Arthur Cayley ได้ขยายสูตรไปในหลายทิศทางโดยการใช้ดีกรีของจุด แม้ว่าเขาจะอ้างถึงเอกสารต้นฉบับของ Brochardt แล้วแต่ชื่อของ Cayley's formula ก็กลายเป็นสูตรมาตรฐาน และจาก [1] ได้กล่าวไว้ว่ามีการพิสูจน์ สูตรการหาต้นไม้ของเคย์เลย์ไว้มากมาย หนึ่งในนั้นได้มีการพิสูจน์โดยการใช้ Kirchhoff's matrix tree theorem ซึ่งเป็นผลงานของ Gustav Kirchhoff นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน เป็นสูตรการหาจำนวนของต้นไม้แผ่ทั่วในกราฟโดยการใช้ดีเทอร์มิเนนท์ คือการนำโคแฟคเตอร์ใด ๆ ของเมทริกซ์ที่ได้จากการลบเมทริกซ์ดีกรีด้วยเมทริกซ์ประชิดในกราฟ จะมีค่าเป็นจำนวนลาเบลต้นไม้แผ่ทั่วที่แตกต่างกันทั้งหมดในกราฟนั้นๆ

ปัจจุบันการศึกษาการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วยังคงเป็นเรื่องที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจในการทำวิจัย และมีบทความวิจัยด้านนี้ออกมาอย่างต่อเนื่อง เช่น ในปี ค.ศ. 1990 [2] Moh'd Z. Abu-Sbeih ได้แนะนำวิธีการแบบใหม่ในการหาจำนวนของต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟบริบูรณ์ K_n และ กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{m,n}$ ในปี ค.ศ. 2010 [9] Jianxi Li , Wai Chee Shiu และ An Chang ได้แสดงขอบเขตบนของจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ โดยใช้อันดับ ขนาด ดีกรีค่ามากที่สุด-น้อยที่สุด จำนวนของคอนเนคติวิตี้ และจำนวนโครมาติค

ของกราฟในการพิจารณา ในปี ค.ศ. 2014 [8] Jianxi Li และ Wai Chee Shiu ได้แสดงสูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ corona กับการดำเนินการการบวกของกราฟ นอกจากนี้ สามารถศึกษาการหาขอบเขตบนของจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟด้วยวิธีต่าง ๆ ได้จากเอกสารอ้างอิง [5, 6, 7] เป็นต้น

ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟและการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ มีดังต่อไปนี้ เรียก G ว่าเป็น**กราฟ** (gragh) เมื่อ G เป็นคู่อันดับที่ประกอบด้วยเซตจำนวนสองเซตที่มีความสัมพันธ์กัน คือ $G = (V(G), E(G))$ โดยที่เซต $V(G)$ จะเรียกว่า**เซตของจุด** (vertex set) ซึ่งเป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียก $v \in V(G)$ ว่า**จุด** (vertex) ของกราฟ G และ เซต $E(G)$ จะเรียกว่า**เซตของเส้น** (edge set) ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตย่อยที่มีสองสมาชิกใน $V(G)$ กล่าวคือ $e \in E(G)$ เมื่อ $e = \{u, v\}$ สำหรับบางสมาชิก $u, v \in V(G)$ นั่นคือ $E(G) \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G)\}$ เรียกสมาชิก $e \in E(G)$ ว่า**เส้น** (edge) ของกราฟ G ถ้า $e = \{u, v\} \in E(G)$ จะเขียนอย่างง่ายเป็น $e = uv$ ถ้า $uv \in E(G)$ แล้วจะเรียกว่า u **ประชิด** (adjacent) กับ v การเขียนแผนภาพของกราฟอาจไม่จำเป็นต้องกำหนดชื่อจุดกำกับไว้ก็ได้ ซึ่งกรณีเหล่านี้จะเป็นในกรณีที่เราจะพิจารณาที่เฉพาะโครงสร้างของกราฟไม่ได้พิจารณาที่ชื่อจุดหรือเส้นแต่อย่างใด สำหรับกราฟที่มีการกำหนดชื่อจุดจะเรียกว่าเป็น **ลาเบลกราฟ** (labeled graph) ส่วนกราฟที่ไม่มีการกำหนดชื่อจุดจะเรียกว่า **อันลาเบลกราฟ** (unlabeled graph)

เรียกจำนวนจุดและจำนวนเส้นในกราฟ G ว่า**อันดับ** (order) และ**ขนาด** (size) ของกราฟ G ตามลำดับ นั่นคือ ถ้ากราฟ G มีอันดับคือ n และขนาดคือ m จะได้
$|V(G)| = n$ และ $|E(G)| = m$

สำหรับกราฟ $G = (V(G), E(G))$ และกราฟ $H = (V(H), E(H))$ แล้วจะเรียกกราฟ H ว่าเป็น **กราฟย่อยแผ่ทั่ว** (spanning subgraph) ของกราฟ G ถ้า H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ที่ซึ่ง $V(H) = V(G)$

ให้ G เป็นกราฟ โดยที่ $e \in E(G)$ แล้ว $G \setminus e$ จะหมายถึงกราฟย่อยแผ่ทั่วของ G ที่ได้จากการลบเส้น e จากกราฟ G นั่นคือ $V(G \setminus e) = V(G)$ และ $E(G \setminus e) = E(G) - \{e\}$ ทำนองเดียวกัน ถ้า $T = \{e_1, e_2, \ldots, e_t\} \subseteq E(G)$ แล้ว $G \setminus T$ จะหมายถึงกราฟย่อยแผ่ทั่วของ G ที่ได้จากการลบเส้น $e_1, e_2, \ldots, e_t$ จากกราฟ G

ถ้า $u, v \in V(G)$ แล้ว **วิถี** $u - v$ ($u - v$ path) ที่มี**ความยาว** (lengh) k ของกราฟ G จะหมายถึงลำดับจำกัด (finite sequence) ของจุด $u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ ที่แตกต่างกันในกราฟ G โดยที่แต่ละจุดในลำดับที่ติดกัน จะเป็นจุดประชิดกัน นั่นคือ $v_i v_{i+1} \in E(G)$ เมื่อ $0 \leq i \leq k - 1$ จะเรียกวิถี $u - v$ ที่มีความยาวมากกว่าหรือเท่ากับ 3 ว่า **วัฏจักร** (cyclic) ถ้า $u = v$ เรียกกราฟ G ว่า **กราฟเชื่อมโยง** (connected graph) ถ้าแต่ละ $u, v \in V(G)$ จะได้ว่า G บรรจุวิถี $u - v$ และเรียกกราฟ G ว่า **กราฟไม่เชื่อมโยง** (disconnected graph) ถ้ากราฟ G ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

จะเรียกเส้น $e \in E(G)$ ในกราฟเชื่อมโยง G ว่าเป็น **เส้นเชื่อมตัด** (bridge) ถ้า $G \setminus e$ เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง สำหรับการเป็นเส้นเชื่อมตัดของกราฟ G อาจพิจารณาได้จากบทตั้งต่อไปนี้

Lemma 1.1. สำหรับกราฟเชื่อมโยง G จะได้ว่าเส้น $e \in E(G)$ จะเป็นเส้นเชื่อมตัดในกราฟ G ก็ต่อเมื่อ e ไม่เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักรของกราฟ G

จะเรียกกราฟ G ว่าเป็น **ต้นไม้** (tree) ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่บรรจุวัฏจักร บทตั้งต่อไปนี้ จะแสดงเงื่อนไขความพอเพียงต่อการเป็นต้นไม้

Lemma 1.2. ให้ G เป็นกราฟที่มีอันดับ n และขนาด m ถ้า G มีสมบัติ 2 ข้อใด ๆ จาก 3 ข้อต่อไปนี้ ได้แก่

(1) G เป็นกราฟเชื่อมโยง

(2) G ไม่บรรจุวัฏจักร

(3) $m = n - 1$

แล้วจะได้ว่า G จะเป็นต้นไม้

ให้ G เป็นกราฟ จะเรียกกราฟย่อยแผ่ทั่ว T ของกราฟ G ว่าเป็น **ต้นไม้แผ่ทั่ว** (spanning tree) ถ้า T เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่บรรจุวัฏจักร เห็นได้ชัดว่า สำหรับแต่ละกราฟเชื่อมโยงใด ๆ จะบรรจุต้นไม้แผ่ทั่วเสมอ กำหนดสัญลักษณ์ $\tau(G)$ แทนจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วที่แตกต่างกันทั้งหมดของกราฟ G

Example 1.1. กำหนดกราฟ G ที่มีแผนภาพของกราฟดังรูป

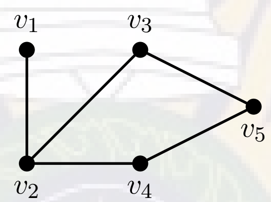

Figure 1.1: แผนภาพของกราฟ G กับการหาต้นไม้แผ่ทั่ว

จะได้จำนวนต้นไม้แผ่ทั่วในกราฟ G ที่แตกต่างกันมีทั้งหมด 4 กราฟย่อย นั่นคือ $\tau(G) = 4$ ดังต่อไปนี้

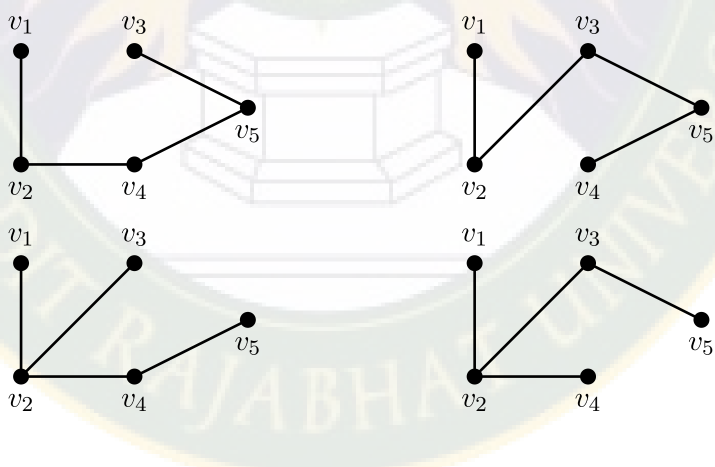

Figure 1.2: แผนภาพของลาเบลต้นไม้แผ่ทั่วในกราฟ G

การหาจำนวนของต้นไม้แผ่ทั่วของ 1-วัฏจักร (unicyclic) จะหาได้โดยไม่ยาก เนื่องจาก 1 - วัฏจักร เป็นกราฟที่บรรจุเพียง 1 วัฏจักร แต่สำหรับกราฟ 2-วัฏจักร จะพิจารณาได้ยากกว่าเพราะมีจำนวน 2 วัฏจักร ในกราฟ ซึ่งจะมีรูปแบบมากกว่า 1 แบบ ผู้แต่งจึงมีความสนใจที่จะหาจำนวนของต้นไม้แผ่ทั่วของ 2-วัฏจักร เพื่อเป็นแนวทางในการขยายไปยังกราฟที่บรรจุวัฏจักรมากกว่า 2 วัฏจักร เป็นต้นไป

2 สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร

สำหรับเนื้อหาในส่วนนี้ จะแสดงการหาจำนวนของต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร โดยจะแบ่งเป็น 2 หัวข้อ คือ (1) จำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกัน และ (2) จำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร

2.1 จำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกัน

อันดับแรก จะกล่าวถึงบทนิยาม และสูตรการหาต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกันที่ผู้วิจัยได้ศึกษาซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

Definition 2.1. ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง จะเรียกกราฟ G ว่าเป็น **กราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกัน** (k-distinct cyclic graph) ถ้า G เป็นกราฟที่มีขนาดเป็น $m = n + k - 1$ และบรรจุวัฏจักรจำนวน $k \geq 1$ วัฏจักรที่แตกต่างกัน นั่นคือ ถ้า C_i และ C_j เป็น 2 วัฏจักรที่แตกต่างกันในกราฟ G แล้ว $E(C_i) \cap E(C_j) = \varnothing$

Example 2.1. กราฟ G ที่มีลักษณะเป็น กราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกัน เมื่อ $k = 1, 2, 3$

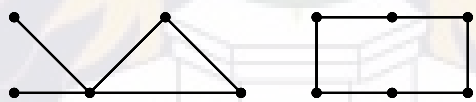

Figure 2.1: แผนภาพของกราฟ 1-วัฏจักรที่แตกต่างกัน

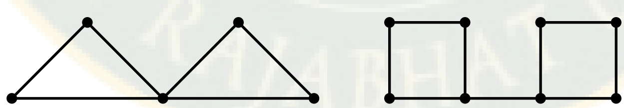

Figure 2.2: แผนภาพของกราฟ 2-วัฏจักรที่แตกต่างกัน

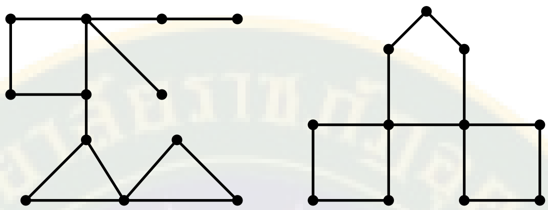

Figure 2.3: แผนภาพของกราฟ 3-วัฏจักรที่แตกต่างกัน

Example 2.2. แผนภาพทั่วไปของกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกันจะมีลักษณะดังรูปที่ 2.4

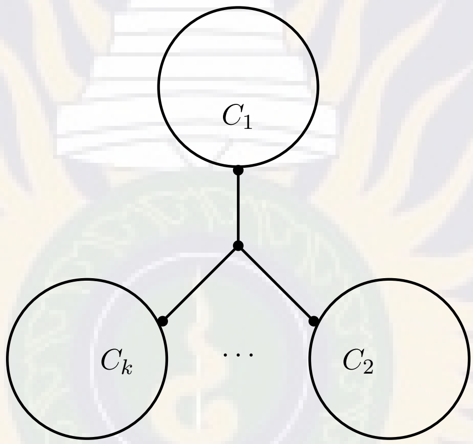

Figure 2.4: แผนภาพทั่วไปของกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกัน

Theorem 2.1. ให้ G เป็นกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกันที่มี C_i เป็นวัฏจักรในกราฟ G เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, k$ ถ้า $|E(C_i)| = q_i$ แล้ว

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^{k} q_i$$

Proof. กำหนดให้ G เป็นกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกันที่มีอันดับ n และบรรจุวัฏจักรทั้งหมด k วัฏจักร คือ $C_1, C_2, \ldots, C_k$ โดยที่แต่ละวัฏจักร C_i จะประกอบด้วยจำนวนเส้นทั้งหมด q_i เส้น เมื่อ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

เนื่องจาก G มีอันดับ n จะได้ว่า $|E(G)| = n + k - 1$ ดังนั้นถ้า T เป็นต้นไม้แผ่ทั่วของ G แล้ว T จะเป็นกราฟเชื่อมโยงที่เกิดจากการลบเส้นจาก G จำนวน k เส้น

จากบทตั้ง 1.1 จะได้ว่า ถ้า $e \notin E(C_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, k$ แล้ว $G \setminus e$ จะเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง และถ้า $e_1, e_2 \in E(C_i)$ สำหรับบาง $i = 1, 2, \ldots, k$ แล้ว $G \setminus \{e_1, e_2\}$ จะเป็นกราฟไม่เชื่อมโยงด้วย

นั่นคือ การหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วบนกราฟ G จะเป็นจำนวนวิธีการลบเส้นจำนวน 1 เส้นของแต่ละวัฏจักรของ G

ถ้า $|E(C_i)| = q_i$ ดังนั้น จะมีจำนวนวิธี q_i วิธีในการเลือกเส้นจำนวน 1 เส้นจาก $E(C_i)$ เพราะว่าสำหรับแต่ละ 2-วัฏจักร C_i และ C_j ที่แตกต่างกันในกราฟ G จะได้ $E(C_i) \cap E(C_j) = \varnothing$ เพราะฉะนั้น จำนวนต้นไม้แผ่ทั่วบนกราฟ G คือ $\tau(G) = q_1 \times q_2 \times \ldots \times q_k$ □

2.2 จำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร

สำหรับเนื้อหาในส่วนนี้ จะเป็นการหาสูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักร

Definition 2.2. ให้ G เป็นกราฟที่มีอันดับ n จะเรียกกราฟ G ว่าเป็น **k-วัฏจักร** (k-cyclic) เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า G เป็นกราฟเชื่อมโยงและมีขนาดเป็น $m = n + k - 1$

ในกรณีที่ $k \in \{1, 2, 3\}$ การกำหนดชื่อเรียกในภาษาอังกฤษจะแตกต่างกันดังนี้

- กราฟ 1-วัฏจักร เรียกว่า unicyclic
- กราฟ 2-วัฏจักร เรียกว่า bicyclic
- กราฟ 3-วัฏจักร เรียกว่า tricyclic

จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้จำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 1-วัฏจักร ดังต่อไปนี้

Corollary 2.1. ให้ G เป็นกราฟ 1-วัฏจักรที่มี C เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า $|E(C)| = q$ แล้ว $\tau(G) = q$

Proof. เห็นได้ชัดจากทฤษฎีบท 2.1 □

นอกจากนี้ สำหรับกราฟ k-วัฏจักร จะได้ขอบเขตของจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วด้วยกราฟ $(k-1)$-วัฏจักร โดยสำหรับกราฟ G ที่เป็นกราฟ k-วัฏจักรและมี C เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า e เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C ของ G เพียงวัฏจักรดียว จะได้ว่า $G' = G \setminus e$ เป็นกราฟ $(k-1)$-วัฏจักร ที่มีจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วคือ $\tau(G')$

ถ้า C เป็นวัฏจักรในกราฟ G ที่มี $|E(C)| = q$ และ $E(C) \cap E(C') = \varnothing$ เมื่อ C' เป็นวัฏจักรของ G แล้วจะได้ว่า $q\tau(G') = \tau(G)$

ถ้า $E(C) \cap E(C') \neq \varnothing$ สำหรับบาง C' ที่เป็นวัฏจักรของ G จะได้ว่า G จะบรรจุต้นไม้แผ่ทั่วที่ไม่ได้เกิดจากการลบเส้น $e \in E(C) \setminus E(C')$ ได้ดังรูปที่ 2.5

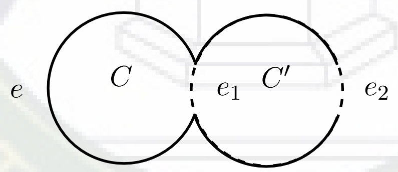

Figure 2.5: ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G ที่ไม่ได้เกิดจากกราฟ $G' = G \setminus e$

ดังนั้น ถ้า q เป็นจำนวนเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C เพียงวัฏจักรเดียว แล้วจะได้อสมการต่อไปนี้

$$q\tau(G') \leq \tau(G) \tag{2.1}$$

เมื่อ $G' = G \setminus e$ เป็นกราฟ $(k-1)$-วัฏจักร และ e เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C ของ G เพียงวัฏจักรเดียว

โดยหลักการเดียวกันนี้ เมื่อดำเนินการลบเส้นแต่ละวัฏจักรในกราฟ G อาจทำให้ได้ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G ที่ซ้ำกันได้ ได้ดังรูปที่ 2.6

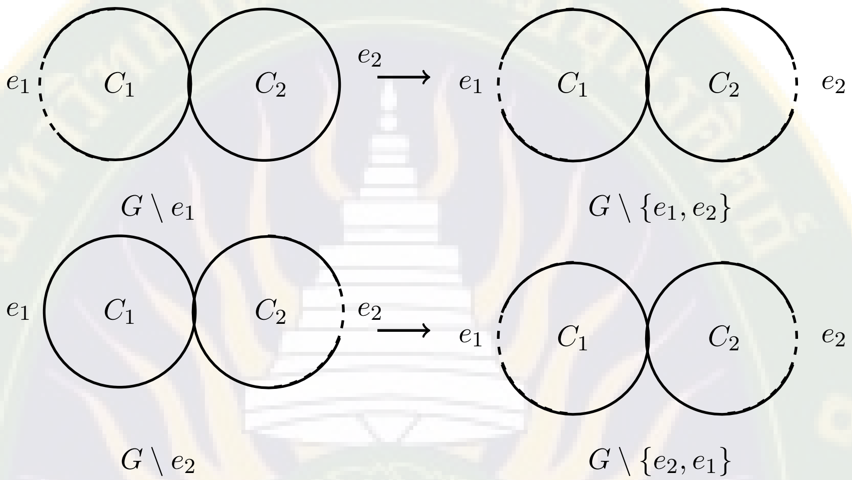

Figure 2.6: ต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G เดียวกันที่ได้จากการพิจารณาวัฏจักรที่ต่างกัน

ดังนั้น ถ้า G บรรจุวัฏจักร $C_1, C_2, \ldots, C_k$ และ q_i เป็นจำนวนเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_i เพียง วัฏจักรเดียว แล้วจะได้อสมการต่อไปนี้

$$\tau(G) \leq \sum_{i=1}^{k} q_i \tau(G'_i) \tag{2.2}$$

เมื่อ $G' = G \setminus e_i$ เป็นกราฟ $(k-1)$-วัฏจักร และ e_i เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_i ของ G เพียงวัฏจักรเดียว

จาก (2.1) และ (2.2) จะได้ทฤษฎีบทที่แสดงขอบเขตของจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักรด้วยกราฟ $(k-1)$-วัฏจักร ต่อไปนี้

Theorem 2.2. ให้ G เป็นกราฟ k-วัฏจักรที่บรรจุวัฏจักร $C_1, C_2, \ldots, C_k$ และ q_i เป็นจำนวนเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_i เพียงวัฏจักรเดียว แล้ว

$$q_i \tau(G') \leq \tau(G) \leq \sum_{i=1}^{k} q_i \tau(G'_i) \tag{2.3}$$

เมื่อ $G' = G \setminus e_i$ เป็นกราฟ $(k-1)$-วัฏจักร และ e_i เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_i ของ G เพียงวัฏจักรเดียว

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้บทแทรกต่อไปนี้

Corollary 2.2. ให้ G เป็นกราฟ 1-วัฏจักรที่มี C เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า $|E(C)| = q$ แล้ว

$$\tau(G) = q\tau(G') = q$$

เมื่อ $G' = G \setminus e$ เป็นกราฟต้นไม้ และ e เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C ของ G

Proof. ถ้า G เป็นกราฟ 1-วัฏจักรและ e เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C โดยที่ $|E(C)| = q$ ของ G จะเห็นว่า $G \setminus e$ จะเป็นต้นไม้ นั่นคือ $\tau(G \setminus e) = 1$

เนื่องจาก G เป็นกราฟ 1-วัฏจักร จะได้ว่า G เป็นกราฟ 1-วัฏจักรที่บรรจุวัฏจักร C เพียงวัฏจักรเดียว จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$$q \cdot 1 \leq \tau(G) \leq q \cdot 1$$

เพราะฉะนั้น $\tau(G) = q$ □

Corollary 2.3. ให้ G เป็นกราฟ 2-วัฏจักรที่มี C_1 และ C_2 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า $|E(C_i)| = q_i$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ แล้ว

$$q_1q_2 - q_is \leq \tau(G) \leq 2q_1q_2 - (q_1 + q_2)s$$

เมื่อ $i \in \{1, 2\}$

Proof. จะแบ่งการพิสูจน์เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 จะแสดงว่า $q_1q_2 - q_is \leq \tau(G)$

จาก $|E(C_i)| = q_i$ โดยที่ $i = 1, 2$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ จะได้ $q_1 - s$ เป็นจำนวนเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_1 เพียงวัฏจักรเดียว ของกราฟ 2-วัฏจักร G

ถ้า $G' = G \setminus e_1$ เป็นกราฟ 1-วัฏจักร และ e_1 เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_1 ของ G เพียงวัฏจักรเดียว จากอสมการ (2.1) จะได้

$$\begin{aligned} \tau(G) &\geq (q_1 - s)\tau(G') \\ &= (q_1 - s)q_2 && \text{(จากบทแทรก 2.2)} \\ &= q_1q_2 - q_2s \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน จะได้ $q_2 - s$ เป็นจำนวนเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_2 เพียงวัฏจักรเดียวของ กราฟวัฏจักร G

ถ้า $G' = G \setminus e_2$ เป็นกราฟ 1-วัฏจักร และ e_2 เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_2 ของ G เพียงวัฏจักรเดียว จาก อสมการ (2.1) และบทแทรก 2.2 จะได้

$$\tau(G) \geq q_1q_2 - q_1s$$

เพราะฉะนั้น $q_1q_2 - q_is \leq \tau(G)$ เมื่อ $i \in \{1, 2\}$

กรณีที่ 2 จะแสดงว่า $\tau(G) \leq 2q_1q_2 - (q_1 + q_2)s$

เนื่องจาก $q_1 - s$ เป็นจำนวนเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_1 เพียงวัฏจักรเดียว และ $q_2 - s$ เป็นจำนวนเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_2 เพียงวัฏจักรเดียว ของกราฟ 2-วัฏจักร G ตามลำดับ

ถ้า $G' = G \setminus e_i$ เป็นกราฟ 1-วัฏจักร และ e_i เป็นเส้นที่อยู่บนวัฏจักร C_i ของ G เพียงวัฏจักรเดียว จากอสมการ (2.2) จะได้

$$\begin{aligned}
\tau(G) &\leq \sum_{i=1}^{2}(q_i - s)\tau(G'_i) \\
&= (q_1 - s)\tau(G'_1) + (q_2 - s)\tau(G'_2) \\
&= (q_1 - s)q_2 + (q_2 - s)q_1 && \text{(จากบทแทรก 2.2)} \\
&= q_1q_2 - q_2s + q_1q_2 - q_1s \\
&= 2q_1q_2 - (q_1 + q_2)s
\end{aligned}$$

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า $q_1q_2 - q_is \leq \tau(G) \leq 2q_1q_2 - (q_1 + q_2)s$ เมื่อ $i \in \{1, 2\}$ □

สำหรับกราฟ 2-วัฏจักร จะได้สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร ดังต่อไปนี้

Theorem 2.3. ให้ G เป็นกราฟ 2-วัฏจักรที่มี C_1 และ C_2 เป็นวัฏจักรในกราฟ G ถ้า $|E(C_i)| = q_i$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$ แล้ว

$$\tau(G) = q_1q_2 - s^2$$

Proof. ถ้า G เป็นกราฟ 2-วัฏจักรที่แตกต่างกัน แล้ว $s = 0$ จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $\tau(G) = q_1q_2$ นั่นคือ $\tau(G) = q_1q_2 - s^2$

สำหรับ $s > 0$ จะแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $e \in E(C_1) \setminus E(C_2)$ แล้วจะได้ $G \setminus e$ เป็น 1-วัฏจักรกราฟ ที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.7

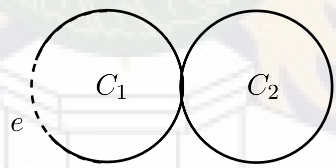

Figure 2.7: แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G \setminus e$

จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า $\tau(G \setminus e) = q_2$
เพราะว่า $|E(C_1) \setminus E(C_2)| = q_1 - s$ ดังนั้น

$$\sum_{e_i \in E(C_1)\setminus E(C_2)} \tau(G \setminus e_i) = \sum_{e_i \in E(C_1)\setminus E(C_2)} q_2 = q_2(q_1 - s)$$

กรณีที่ 2 ถ้า $e \in E(C_1) \cap E(C_2)$ แล้วจะได้ $G \setminus e$ เป็น 1-วัฏจักรกราฟ ที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.8

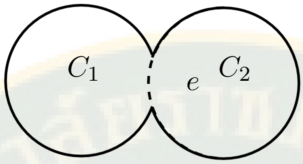

Figure 2.8: แผนภาพทั่วไปของกราฟ $G \setminus e$

จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า

$$\tau(G \setminus e) = (q_1 + q_2) - 2s \tag{2.4}$$

เนื่องจากต้นไม้แผ่ทั่วของ $G \setminus e$ เกิดจากการลบเส้น $e' \in E(C_1) \setminus E(C_2)$ หรือ $e' \in E(C_2) \setminus E(C_1)$ จำนวน 1 เส้นจาก $G \setminus e$

แต่ถ้า $e' \in E(C_1) \setminus E(C_2)$จะได้ว่า$G \setminus \{e, e'\}$ เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่ซ้ำกับ**กรณีที่ 1**

ถ้า $\tau'(G \setminus e)$ แทนจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของ $G \setminus e$ ที่เกิดจากการลบเส้น $e' \in E(C_2) \setminus E(C_1)$ จำนวน 1 เส้นจาก $G \setminus e$

นั่นคือ $\tau'(G \setminus e) = q_2 - s$

เพราะว่า $|E(C_2) \cap E(C_1)| = s$ ดังนั้น

$$\sum_{e_i \in E(C_1) \cap E(C_2)} \tau(G \setminus e_i) = \sum_{e_i \in E(C_1) \cap E(C_2)} q_2 - s = (q_2 - s)s$$

จาก**กรณีที่ 1** และ **2** จะได้ $\tau(G) = q_2(q_1 - s) + (q_2 - s)s = q_1 q_2 - s^2$ □

3 สรุปและข้อเสนอแนะ

ในการศึกษาโครงงานเรื่องสูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร ในครั้งนี้ เราได้สูตรการหาจำนวนและขอบเขตของต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟทั้งหมด 4 สูตร ดังต่อไปนี้

1. สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกัน คือ $\tau(G) = \prod_{i=1}^{k} q_i$ เมื่อ $|E(C_i)| = q_i$
2. สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 1-วัฏจักร คือ $\tau(G) = q$ เมื่อ $|E(C)| = q$
3. สูตรการหาขอบเขตของจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักร คือ $q_i\tau(G') \le \tau(G) \le \sum_{i=1}^{k} q_i \tau(G'_i)$ เมื่อ $|E(C_i)| = q_i$
4. สูตรการหาจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร คือ $\tau(G) = q_1 q_2 - s^2$ เมื่อ $|E(C_i)| = q_i$ และ $|E(C_1) \cap E(C_2)| = s$

ยิ่งไปกว่านี้ ผู้จัดทำได้ขยายผลโครงงานสูตรการหาต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 2-วัฏจักร ไปต่อยอดเป็นสูตรการหาต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ 3-วัฏจักร ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็น 4 กรณี ดังต่อไปนี้

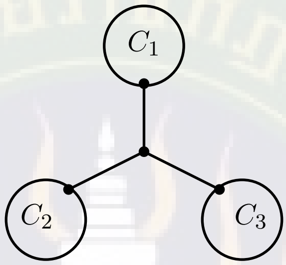

Figure 3.1: แผนภาพทั่วไปของกราฟ3-วัฏจักร กรณีที่ 1

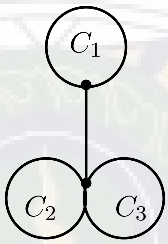

Figure 3.2: แผนภาพทั่วไปของกราฟ3-วัฏจักร กรณีที่ 2

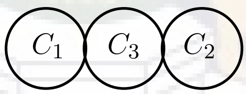

Figure 3.3: แผนภาพทั่วไปของกราฟ3-วัฏจักร กรณีที่ 3

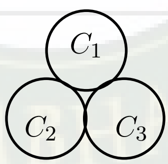

Figure 3.4: แผนภาพทั่วไปของกราฟ3-วัฏจักร กรณีที่ 4

สำหรับผู้ที่สนใจในการศึกษาต่อ สามารถนำขั้นตอนวิธีการหาสูตรของจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักรที่แตกต่างกัน และกราฟ 2-วัฏจักร ไปสู่การหาสูตรของจำนวนต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ k-วัฏจักร

References

[1] นิรุตติ์ พิพรรธนจินดา, **ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.** กำแแพงเพชร: มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร. (2560).

[2] M. Z. Abu-Sbeih, **On the number of spanning tree of K_n and $K_{n,m}$.** Discrete Mathematics 84(2) (1990), 205-207.

[3] **Cayley's formula.** (n.d.). In Wikipedia. Retrieved January 3, 2020, from https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley%27s_formula

[4] A. Cayley, **A theorem on trees.** Quart. J. Pure Appl. Math. 23(1889), 376–378.

[5] K. Das, **A sharp upper bound for the number of spanning trees of a graph.** Graphs Combin. 23(2007), 625-632.

[6] L. Feng, G. Yu, Z. Jiang & L. Ren, **Sharp upper bounds for the number of spanning trees of a graph.** Appl. Anal. Discrete Math. 2(2008), 255-259.

[7] G. Grimmett, **An upper bound for the number of spanning trees of a graph.** Discrete Math. 16(1976), 323-324.

[8] J. Lia & W. C. Shiua, **The number of spanning trees of composite graphs.** J. of Combi. Math. and Combi. Compu. 89(2014), 45-52.

[9] J. Lia, W. C. Shiua & A. Changb, **The number of spanning trees of a graph.** Appl. Math. Letters 23(3)(2010), 286-290.