การมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา
Finite time Stability of Nonlinear Systems with Time Varying Delays

นริศรินทร์ พันอ้น[1], วันวิสา พวงมาลัย[1*]

Naritsarin Phan-aon[1], Wanwisa Puangmalai[1*]

[1]โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

[1] Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Kamphaeng Phet Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: Rakpuang.wan@gmail.com

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยนี้นำเสนอเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาและระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ และอสมการเวอร์ทิงเจอร์ ซึ่งอยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

คำสำคัญ : เสถียรภาพเวลาจำกัด ระบบไม่เชิงเส้น ตัวหน่วงเชิงเวลา ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ อสมการเวอร์ทิงเจอร์

Abstract

In this paper, we present sufficient finite-time stability (FTS) conditions for nonlinear systems with time varying delays and linear systems with time varying delays. By using the Lyapunov-Krasovskii function and Wirtinger-based inequality, this conditions in linear matrix inequalities (LMIs) form.

Keywords : Finite time stability, Nonlinear systems, Time delay, Lyapunov-Krasovskii function, Wirtinger inequality

บทนำ

หนึ่งในวิธีการที่สามารถปรับสภาพเศรษฐกิจได้ คือ การปรับอัตราดอกเบี้ยของธนาคารกลาง แต่ผลที่เกิดจากการปรับอัตราดอกเบี้ยนั้นจะเห็นชัดขึ้นเมื่อระยะเวลาผ่านไปช่วงเวลาหนึ่ง เหตุการณ์ข้างต้นเป็นตัวอย่างของตัวหน่วงเชิงเวลาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน และตัวหน่วงเชิงเวลายังสามารถปรากฏในระบบต่าง ๆ เช่น ระบบชีวภาพ ระบบนิเวศ ระบบสังคม ระบบวิศวกรรม เป็นต้น

จากปัญหาของการควบคุมวิถีของยานอวกาศจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสุดท้ายในช่วงเวลาที่กำหนดสามารถแก้ปัญหาได้โดยการกำหนดขอบเขตเริ่มต้น และควบคุมให้ยานอวกาศขับเคลื่อนอยู่ในขอบเขตที่กำหนดไปยังจุดสุดท้ายภายใต้เวลาที่กำหนด สถานการณ์ข้างต้นเรียกทั่วไปว่าเสถียรภาพเวลาจำกัด (FTS) ซึ่งไม่นานมานี้มีการนำกระบวนการของการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดไปประยุกต์ใช้กับระบบเชิงเส้น ระบบไม่เชิงเส้น เป็นต้น โดยมีบทความวิจัยที่เกี่ยวข้องในการดำเนินการวิจัย ดังนี้

ในปี ค.ศ. 2012 เอส บี สโตจาโนวิก และคณะ [1] ได้ศึกษาการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau),\ t > 0 \tag{1}$$

เมื่อกำหนด $x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0]$

โดยที่ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ เงื่อนไขเริ่มต้น $\phi(t)$ คือ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง ที่ $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ และ $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ เป็นเมทตริกซ์คงที่ที่ทราบค่า และกำหนดให้ τ ค่าคงที่ของตัวหน่วงเชิงเวลา และสอดคล้องกับ

$$0 \le \tau \le \tau_M$$

เมื่อ τ_M เป็นค่าคงที่ โดยเงื่อนไขที่ได้เกิดจากการใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ และอสมการนิวตัน-ไลบ์นิทซ์

ในปี ค.ศ. 2014 ธเนศร์ โรจน์ศิรพิศาล และจิรพงศ์ พวงมาลัย [2] ได้ปรับปรุงเงื่อนไขเพียงพอสำหรับระบบระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (1) โดยเงื่อนไขที่ได้เกิดจากการปรับฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้และอสมการเจนเซน

ในปี ค.ศ. 2016 เอส บี สโตจาโนวิก [3] ได้ศึกษาปัญหาของการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดระบบต่อไปนี้

ระบบตัวหน่วงเชิงเวลากับการรบกวนที่ไม่เชิงเส้น

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t),\ \ t > 0 \tag{2}$$

เมื่อกำหนด $x(t) = \phi(t), t \in [-\tau_M, 0]$

ฟังก์ชันตัวหน่วงเชิงเวลา $\tau(t)$ สอดคล้องกับ

$$0 \le \tau_m \le \tau(t) \le \tau_M,\ \dot{\tau}(t) \le \mu < 1$$

โดยเงื่อนไขที่ได้เกิดจากการใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ และพัฒนาอสมการใหม่

ในปี ค.ศ. 2019 วันวิสา พวงมาลัย และจิรพงศ์ พวงมาลัย [4] ได้ศึกษาปัญหาของการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาแบบช่วง

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h(t)),\ \ t > 0 \tag{3}$$

โดยที่ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ที่ทราบค่า และฟังก์ชันตัวหน่วงเชิงเวลา $h(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่สอดคล้องกับ

$$0 < h_1 \le h(t) \le h_2,\ h_1 \ne h_2$$

โดยเงื่อนไขที่ได้เกิดจากการใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้และอสมการเวอร์ทิงเจอร์

สำหรับบทความวิจัยนี้ต้องการศึกษาระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้และอสมการเวอร์ทิงเจอร์ เพื่อหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัด

ความรู้พื้นฐานของงานวิจัย

ในบทความวิจัยนี้จะนำเสนอเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดสำหรับระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาโดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้และอสมการเวอร์ทิงเจอร์ ดังนี้

พิจารณาระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-h(t)),t) \ , t > 0 \tag{4}$$

โดยที่ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ เป็นปริฏมิเวกเตอร์ และ $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ที่ทราบค่า และฟังก์ชันตัวหน่วงเชิงเวลา $h(t)$ สอดคล้องกับ

$$0 < h_1 < h(t) < h_2$$

โดยมีการพิจารณาค่าเริ่มต้น $x(t) = \phi(t)$ สำหรับ $t \in [-h_2, 0]$ เป็นฟังก์ชันค่าเริ่มต้นและสอดคล้องกับ

$$\| \phi \| := \sup_{t \in [-h_2, 0]} \{ \| \phi(t) \|, \| \dot{\phi}(t) \| \}$$

ซึ่ง $f(x(t),t)$ และ $g(x(t-h(t)),t)$ เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และสอดคล้องกับ

$$f^T(x(t),t) f(x(t),t) \le \varepsilon x^T(t) F^T F x(t)$$

และ $$g^T(x(t-h(t)),t) g(x(t-h(t)),t) \le \varepsilon_h x^T(t-h(t)) F_h^T F_h x(t-h(t))$$

ซึ่งจะได้ว่า $$\varepsilon x^T(t) F^T F x(t) - f^T(x(t),t) f(x(t),t) \ge 0$$

และ $$\varepsilon_h x^T(t-h(t)) F_h^T F_h x(t-h(t)) - g^T(x(t-h(t)),t) g(x(t-h(t)),t) \ge 0$$

โดยที่ F, F_h เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ที่ทราบค่า และ $\varepsilon, \varepsilon_h$ เป็นสเกลาร์บวกที่ทราบค่า

ในการดำเนินการวิจัยจำเป็นต้องใช้ความรู้พื้นฐานของเสถียรภาพเวลาจำกัด อสมการเวอร์ทิงเจอร์และเชอร์คอมพลีเมนต์ เพื่อนำไปใช้ในการหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบไม่เชิงเส้นมีตัวหน่วงเชิงเวลา ดังนี้

บทนิยาม จะกล่าวว่าระบบ (3) หรือ (4) มีเสถียรภาพเวลาจำกัด พิจารณาโดย (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \le c_1 \le c_2$

$$\| \phi \|^2 \le c_1 \Rightarrow \| x(t) \|^2 < c_2 \ , \forall t \in [0, T]$$

บทตั้ง อสมการเวอร์ทิงเจอร์ (Wirtinger inequality) สำหรับเมทริกซ์สมมาตรของค่าคงที่ใด ๆ $R > 0$ ที่ซึ่งอนุพันธ์ของ $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

ถ้า $\zeta = \left[x^T(b) \quad x^T(a) \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b x^T(u) du \right]^T$ แล้ว $\int_a^b \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du \ge \frac{1}{b-a} \zeta^T \begin{bmatrix} 4R & 2R & -6R \\ * & 4R & -6R \\ * & * & 12R \end{bmatrix} \zeta$

บทตั้ง เชอร์คอมพลีเมนต์ (Schur complement lemma) ให้ X, Y, Z เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ โดยที่ $Y = Y^T > 0, X = X^T$ แล้ว $X + Z^T Y^{-1} Z < 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} X & Z^T \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0 \text{ หรือ } \begin{bmatrix} -Y & Z \\ Z^T & X \end{bmatrix} < 0$$

ผลการวิจัย

ต่อไปจะเป็นการแสดงเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้และอสมการเวอร์ทิงเจอร์ ดังนี้

เสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

ทฤษฎีบท ระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (4) มีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \le c_1 < c_2$ ถ้ามีสเกลาร์ $\alpha > 0$ และมีเมทริกซ์สมมาตรที่มีค่าบวกแน่นอน P, Q_1, Q_2, R_1 และ $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ และสเกลาร์บวก $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\beta_1 I < P < \beta_2 I,\ 0 < Q_1 < \beta_3 I,\ 0 < Q_2 < \beta_4 I,\ 0 < R_1 < \beta_5 I,\ 0 < R_2 < \beta_6 I, \tag{5}$$

และ

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{15} & \omega_{16} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

เมื่อ $\omega_{11} = -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T}$, $\omega_{12} = \beta_2 \sqrt{c_1}$, $\omega_{13} = \beta_3 \sqrt{c_1 h_1}$, $\omega_{14} = \beta_4 \sqrt{c_1 h_2}$,

$$\omega_{15} = \beta_5 \sqrt{c_1\left(\frac{(h_1)^2}{2}\right)},\ \omega_{16} = \beta_6 \sqrt{c_1\left(\frac{(h_2)^2 - (h_1)^2}{2}\right)},$$

และ

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & \Psi_{14} & \Psi_{15} & \Psi_{16} & \Psi_{17} & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22} & 0 & \Psi_{24} & 0 & 0 & \Psi_{27} & 0 & \Psi_{29} \\ * & * & \Psi_{33} & \Psi_{34} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{38} & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & \Psi_{45} & \Psi_{46} & 0 & \Psi_{48} & \Psi_{49} \\ * & * & * & * & \Psi_{55} & \Psi_{56} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Psi_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Psi_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Psi_{88} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Psi_{99} \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

เมื่อ $h_{21} = h_2 - h_1$

$$\Psi_{11} = e^{\alpha t}[PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2]A_0 - \frac{4R_1}{h_1} + \varepsilon F^T F,\ \Psi_{12} = -\frac{2R_1}{h_1},$$

$$\Psi_{14} = e^{\alpha t}\left[A_0^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2]A_1\right] + PA_1,\ \Psi_{15} = e^{\alpha t}\left[A_0^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2] + P\right],$$

$$\Psi_{16} = e^{\alpha t}\left[A_0^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2] + P\right],\ \Psi_{17} = \frac{6R_1}{h_1}$$

$$\Psi_{22} = -e^{\alpha t} Q_1 - \frac{4R_1}{h_1} - \frac{4R_2}{h(t) - h_1},\ \Psi_{24} = -\frac{2R_1}{h(t) - h_1},\ \Psi_{27} = \frac{6R_1}{h_1},\ \Psi_{29} = \frac{6R_2}{h(t) - h_1},$$

$$\Psi_{33}=-e^{\alpha t}Q_2-\frac{4R_2}{h_2-h(t)},\ \Psi_{34}=-\frac{2R_2}{h_1},\ \Psi_{38}=\frac{6R_2}{h_2-h(t)},$$

$$\Psi_{44}=e^{\alpha t}\left[A_1^T[h_1R_1+h_{21}R_2]A_1\right]-\frac{4R_2}{h_2-h(t)}-\frac{4R_2}{h(t)-h_1}+\varepsilon_h F_h^T F_h,$$

$$\Psi_{45}=A_1^T[h_1R_1+h_{21}R_2],\Psi_{46}=A_1^T[h_1R_1+h_{21}R_2],\ \Psi_{48}=\frac{6R_2}{h_2-h(t)},\ \Psi_{49}=\frac{6R_2}{h(t)-h_1},$$

$$\Psi_{55}=e^{\alpha t}[h_1R_1+h_{21}R_2]-I\ ,\ \Psi_{56}=e^{\alpha t}[h_1R_1+h_{21}R_2],\Psi_{66}=e^{\alpha t}[h_1R_1+h_{21}R_2]-I,$$

$$\Psi_{77}=-\frac{12R_1}{h_1},\ \Psi_{88}=-\frac{12R_2}{h_2-h(t)},\ \Psi_{99}=-\frac{12R_2}{h(t)-h_1}$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ต่อไปนี้

$$V(x(t))=\sum_{i=1}^{5}V_i(x(t))$$

โดยที่

$$V_1(x(t))=e^{\alpha t}x^T(t)Px(t),$$

$$V_2(x(t))=e^{\alpha t}\int_{t-h_1}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds,$$

$$V_3(x(t))=e^{\alpha t}\int_{t-h_2}^{t}x^T(s)Q_2x(s)ds,$$

$$V_4(x(t))=e^{\alpha t}\int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds,$$

$$V_5(x(t))=e^{\alpha t}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds$$

พิจารณาอนุพันธ์ของ $V(x(t))$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x(t))&=e^{\alpha t}x^T(t)\left[PA_0+A_0^TP\right]x(t)+2e^{\alpha t}x^T(t)PA_1x(t-h(t))+2e^{\alpha t}x^T(t)Pf(x(t),t)\\&\quad+2e^{\alpha t}x^T(t)Pg(x(t-h(t),t)+\alpha V_1(x(t)),\end{aligned}$$

$$\dot{V}_2(x(t))=e^{\alpha t}x^T(t)Q_1x(t)-e^{\alpha t}x^T(t-h_1)Q_1x(t-h_1)+\alpha V_2(x(t)),$$

$$\dot{V}_3(x(t))=e^{\alpha t}x^T(t)Q_2x(t)-e^{\alpha t}x^T(t-h_2)Q_2x(t-h_2)+\alpha V_3(x(t)),$$

$$\dot{V}_4(x(t))=e^{\alpha t}h_1\dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t)-e^{\alpha t}\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du+\alpha V_4(x(t)),$$

$$\dot{V}_5(x(t))=e^{\alpha t}h_{21}\dot{x}^T(t)R_2\dot{x}(t)-e^{\alpha t}\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds+\alpha V_5(x(t))$$

พิจารณา $\dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t)$ เมื่อ $i=1,2$ จะได้

เนื่องจาก $\dot{x}(t)=A_0x(t)+A_1x(t-h(t))+f(x(t),t)+g(x(t-h(t)),t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t)&=A_0x(t)+A_1x(t-h(t))+f(x(t),t)+g(x(t-h(t)),t)\big]^T R_i\\&\quad\times\big[A_0x(t)+A_1x(t-h(t))+f(x(t),t)+g(x(t-h(t)),t)\big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^T(t)A_0^T R_i A_0 x(t) + 2x^T(t)A_0^T R_i A_1 x(t-h(t)) \\
&\quad + 2x^T(t)A_0^T R_i f(x(t),t) + 2x^T(t)A_0^T R_i g(x(t-h(t)) \\
&\quad + x^T(t-h(t))A_1^T R_i A_1 x(t-h(t)) + 2x^T(t-h(t))A_1^T R_i f(x(t),t) \\
&\quad + 2x^T(t-h(t))A_1^T R_i g(x(t-h(t) + f^T(x(t),t)R_i f(x(t),t) \\
&\quad + 2f^T(x(t),t)R_i g(x(t-h(t) + g^T(x(t-h(t)R_i g(x(t-h(t)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จะได้

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) \le{}& x^T(t)[e^{\alpha t}[PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_0]]x(t) \\
&+ 2x^T(t)[e^{\alpha t}[A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1 + PA_1]]x(t-h(t)) \\
&+ 2x^T(t)[e^{\alpha t}A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2] + P]f(x(t),t) \\
&+ 2x^T(t)[e^{\alpha t}A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2] + P]g(x(t-h(t)) \\
&- x^T(t-h_1)[e^{\alpha t}Q_1]x(t-h_1) - x^T(t-h_2)[e^{\alpha t}Q_2]x(t-h_2) \\
&+ x^T(t-h(t))[e^{\alpha t}[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1]]x(t-h(t)) \\
&+ 2x^T(t-h(t))[e^{\alpha t}[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]]]f(x(t),t) \\
&+ 2x^T(t-h(t))[e^{\alpha t}[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]]]g(x(t-h(t)) \\
&+ f^T(x(t),t)[e^{\alpha t}[h_1R_1 + h_{21}R_2]f(x(t),t) \\
&+ 2f^T(x(t),t)[e^{\alpha t}[h_1R_1 + h_{21}R_2]g(x(t-h(t) \\
&+ g^T(x(t-h(t)[e^{\alpha t}[h_1R_1 + h_{21}R_2]g(x(t-h(t) \\
&- e^{\alpha t}\int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du - e^{\alpha t}\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du
\end{aligned}
$$

สำหรับ $t>0$ และ $\alpha>0$ จะได้ว่า $1 \le e^{\alpha t}$ นั้นคือ

$$
\begin{aligned}
-e^{\alpha t}\int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du &\le -\int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du \\
-e^{\alpha t}\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du &\le -\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du \\
&\le -\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du - \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du
\end{aligned}
$$

ต่อไปพิจารณา $-\int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du$, $-\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du$ และ $-\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du$

กำหนดให้

$$
\begin{aligned}
\varpi_1(t) &= \left[x^T(t) \quad x^T(t-h_1) \quad \frac{1}{h_1}\int_{t-h_1}^{t} x^T(u)du\right]^T \\
\varpi_2(t) &= \left[x^T(t-h(t)) \quad x^T(t-h_2) \quad \frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x^T(u)du\right]^T \\
\varpi_3(t) &= \left[x^T(t-h_1) \quad x^T(t-h(t)) \quad \frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x^T(u)du\right]^T
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\eta(t) = \Big[&x^T(t) \quad x^T(t-h_1) \quad x^T(t-h_2) \quad x^T(t-h(t)) \quad f^T(x(t),t) \; g^T(x(t-h(t) \; \frac{1}{h_1}\int_{t-h_1}^{t} x^T(u)du \\
&\frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1} x^T(u)du \qquad \frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)} x^T(u)du\Big]^T
\end{aligned}
$$

โดยบทตั้งอสมการเวอร์ทิงเจอร์ (Wirtinger inequality) จะได้

$$-\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du \le -\frac{1}{h_1}\varpi_1^T(t)\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_1(t)$$

$$-\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du \le -\frac{1}{h_2-h(t)}\varpi_2^T(t)\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_2(t)$$

$$-\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du \le -\frac{1}{h(t)-h_1}\varpi_3^T(t)\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_3(t)$$

จาก $\qquad \varepsilon x^T(t)F^TFx(t)-f^T(x(t),t)f(x(t),t)\ge 0$

และ $\qquad \varepsilon_h x^T(t-h(t))F_h^TF_hx(t-h(t))-g^T(x(t-h(t)),t)g(x(t-h(t)),t)\ge 0$

จะได้ว่า $\qquad \dot{V}(x(t))-\alpha V(x(t))\le\eta^T(t)\Psi\eta(t) \qquad (8)$

จาก $\Psi<0$ จะได้ $\eta^T(t)\Psi\eta(t)<0 \qquad (9)$

ดังนั้น จาก (8) และ (9) จะได้ว่า

$$\dot{V}(x(t))-\alpha V(x(t))<0 \qquad (10)$$

นำ $e^{-\alpha t}$ คูณในอสมการ (10) และอินทิเกรตจาก 0 ถึง t กับ $t\in[0,T]$ จะได้

$$V(x(t))<e^{\alpha t}V(x(0)) \qquad (11)$$

และ $x^T(t)Px(t)=V_1(x(t))\le V(x(t))<e^{\alpha t}V(x(0))$

จากความสัมพันธ์ $\beta_1 I<P<\beta_2 I$ จะได้

$$\beta_1\|x(t)\|^2<e^{\alpha t}V(x(0)) \qquad (12)$$

พิจารณา $V(x(t))$ เมื่อ $t=0$ จะได้

$$V(x(0))=x^T(0)Px(0)+\int_{-h_1}^{0}x^T(s)Q_1x(s)ds+\int_{-h_2}^{0}x^T(s)Q_2x(s)ds$$
$$+\int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0}\dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds+\int_{-h_1}^{-h_2}\int_{s}^{0}\dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds$$

จาก (4) จะได้

$$V(x(0))<x^T(0)\beta_2Ix(0)+\int_{-h_1}^{0}x^T(s)\beta_3Ix(s)ds+\int_{-h_2}^{0}x^T(s)\beta_4Ix(s)ds$$
$$+\int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0}\dot{x}^T(\theta)\beta_5I\dot{x}(\theta)d\theta ds+\int_{-h_1}^{-h_2}\int_{s}^{0}\dot{x}^T(\theta)\beta_6I\dot{x}(\theta)d\theta d$$

และจากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น จะได้

$$V(x(0))\le\beta_2\|\phi\|^2+\beta_3\int_{-h_1}^{0}\|\phi\|^2ds+\beta_4\int_{-h_2}^{0}\|\phi\|^2ds+\beta_5\int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0}\|\phi\|^2d\theta ds+\beta_6\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{s}^{0}\|\phi\|^2d\theta ds$$
$$=\left(\beta_2+\beta_3h_1+\beta_4h_2+\beta_5\left(\frac{(h_1)^2}{2}\right)+\beta_6\left(\frac{(h_2)^2-(h_1)^2}{2}\right)\right)\|\phi\|^2 \qquad (13)$$

ต่อไปกำหนดให้

$$\Pi := c_1\left\{\beta_2 + \beta_3 h_1 + \beta_4 h_2 + \beta_5\Big(\frac{(h_1)^2}{2}\Big) + \beta_6\Big(\frac{(h_2)^2 - (h_1)^2}{2}\Big)\right\} - \beta_1 c_2 e^{-\alpha T} \tag{14}$$

จากบทตั้งเชอร์คอมพลีเมนต์ และ (6) จะได้ $\Pi < 0$ นั่นคือ

$$c_1\Big[\beta_2 + \beta_3 h_1 + \beta_4 h_2 + \beta_5\Big(\frac{(h_1)^2}{2}\Big) + \beta_6\Big(\frac{(h_2)^2 - (h_1)^2}{2}\Big)\Big] < \beta_1 c_2 e^{-\alpha T} \tag{15}$$

กำหนดให้ $\|\phi\|^2 \le c_1$ จากอสมการ (12), (13) และ (15) จะได้

เมื่อ $t \in [0,T]$ และ $T \ge 0$ โดย $t - T \le 0$ และ $e^{\alpha(t-T)} \le 1$

$$\beta_1 \| x(t)\|^2 < e^{\alpha t} c_2 \beta_1 e^{-\alpha T} \le c_2$$

ดังนั้น $\| x(t)\|^2 < c_2$

เสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

พิจารณาระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-h(t)),t) \text{ , } t > 0 \tag{4}$$

โดยกำหนดให้ $f(x(t),t) = 0$ และ $g(x(t-h(t)),t) = 0$ จะได้

ระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h(t)) \qquad , t > 0 \tag{16}$$

บทแทรก ระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (16) มีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \le c_1 < c_2$ ถ้ามีสเกลาร์ $\alpha > 0$ และมีเมทริกซ์สมมาตรที่มีค่าบวกแน่นอน P, Q_1, Q_2, R_1 และ $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ และสเกลาร์บวก $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\beta_1 I < P < \beta_2 I,\ 0 < Q_1 < \beta_3 I,\ 0 < Q_2 < \beta_4 I,\ 0 < R_1 < \beta_5 I,\ 0 < R_2 < \beta_6 I,$$

และ

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{15} & \omega_{16} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ $\omega_{11} = -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T}$, $\omega_{12} = \beta_2\sqrt{c_1}$, $\omega_{13} = \beta_3\sqrt{c_1 h_1}$, $\omega_{14} = \beta_4\sqrt{c_1 h_2}$,

$\omega_{15} = \beta_5\sqrt{c_1\Big(\frac{(h_1)^2}{2}\Big)}$, $\omega_{16} = \beta_6\sqrt{c_1\Big(\frac{(h_2)^2 - (h_1)^2}{2}\Big)}$,

และ

$$\hat{\Psi}=\begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{11} & \hat{\Psi}_{12} & 0 & \hat{\Psi}_{14} & \hat{\Psi}_{15} & 0 & 0 \\ * & \hat{\Psi}_{22} & 0 & \hat{\Psi}_{24} & \hat{\Psi}_{25} & 0 & \hat{\Psi}_{27} \\ * & * & \hat{\Psi}_{33} & \hat{\Psi}_{34} & 0 & \hat{\Psi}_{36} & 0 \\ * & * & * & \hat{\Psi}_{44} & 0 & \hat{\Psi}_{46} & \hat{\Psi}_{47} \\ * & * & * & * & \hat{\Psi}_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \hat{\Psi}_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \hat{\Psi}_{77} \end{bmatrix}<0,$$

เมื่อ $h_{21}=h_2-h_1$

$$\hat{\Psi}_{11}=e^{\alpha t}[PA_0+A_0^TP+Q_1+Q_2+A_0^T[h_1R_1+h_{21}R_2]A_0-\frac{4R_1}{h_1},\ \hat{\Psi}_{12}=-\frac{2R_1}{h_1},$$

$$\hat{\Psi}_{14}=e^{\alpha t}\left[A_0^T[h_1R_1+h_{21}R_2]A_1\right]+PA_1,\ \hat{\Psi}_{15}=\frac{6R_1}{h_1},$$

$$\hat{\Psi}_{22}=-e^{\alpha t}Q_1-\frac{4R_1}{h_1}-\frac{4R_2}{h(t)-h_1},\ \hat{\Psi}_{24}=-\frac{2R_1}{h(t)-h_1},\ \hat{\Psi}_{25}=\frac{6R_1}{h_1},\ \hat{\Psi}_{27}=\frac{6R_2}{h(t)-h_1},$$

$$\hat{\Psi}_{33}=-e^{\alpha t}Q_2-\frac{4R_2}{h_2-h(t)},\ \hat{\Psi}_{34}=-\frac{2R_2}{h_1},\ \hat{\Psi}_{36}=\frac{6R_2}{h_2-h(t)},$$

$$\hat{\Psi}_{44}=e^{\alpha t}\left[A_1^T[h_1R_1+h_{21}R_2]A_1\right]-\frac{4R_2}{h_2-h(t)}-\frac{4R_2}{h(t)-h_1},\hat{\Psi}_{46}=\frac{6R_2}{h_2-h(t)},\ \hat{\Psi}_{47}=\frac{6R_2}{h(t)-h_1},$$

$$\hat{\Psi}_{55}=-\frac{12R_1}{h_1},\ \hat{\Psi}_{66}=-\frac{12R_2}{h_2-h(t)},\ \hat{\Psi}_{77}=-\frac{12R_2}{h(t)-h_1}$$

พิสูจน์ สามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท โดยตัดขั้นตอนการพิสูจน์ที่เกี่ยวข้องกับ $f(x(t),t)$ และ $g(x(t-h(t)),t)$ ออก

สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

สำหรับการดำเนินการวิจัยเพื่อหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้และอสมการเวอร์ทิงเจอร์ได้ข้อสรุป ดังนี้

ทฤษฎีบท ระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (4) มีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1,c_2,T) เมื่อ $0\le c_1<c_2$ ถ้ามีสเกลาร์ $\alpha>0$ และมีเมทริกซ์สมมาตรที่มีค่าบวกแน่นอน P,Q_1,Q_2,R_1 และ $R_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$ และสเกลาร์บวก $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6$ ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\beta_1I<P<\beta_2I,\ 0<Q_1<\beta_3I,\ 0<Q_2<\beta_4I,\ 0<R_1<\beta_5I,\ 0<R_2<\beta_6I,$$

และ

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{15} & \omega_{16} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ $\omega_{11} = -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T}$, $\omega_{12} = \beta_2\sqrt{c_1}$, $\omega_{13} = \beta_3\sqrt{c_1 h_1}$, $\omega_{14} = \beta_4\sqrt{c_1 h_2}$,

$$\omega_{15} = \beta_5\sqrt{c_1\left(\frac{(h_1)^2}{2}\right)} \ , \omega_{16} = \beta_6\sqrt{c_1\left(\frac{(h_2)^2-(h_1)^2}{2}\right)} \ ,$$

และ

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & \Psi_{14} & \Psi_{15} & \Psi_{16} & \Psi_{17} & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22} & 0 & \Psi_{24} & 0 & 0 & \Psi_{27} & 0 & \Psi_{29} \\ * & * & \Psi_{33} & \Psi_{34} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{38} & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & \Psi_{45} & \Psi_{46} & 0 & \Psi_{48} & \Psi_{49} \\ * & * & * & * & \Psi_{55} & \Psi_{56} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Psi_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Psi_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Psi_{88} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Psi_{99} \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ $h_{21} = h_2 - h_1$

$$\Psi_{11} = e^{\alpha t}[PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_0 - \frac{4R_1}{h_1} + \varepsilon F^T F, \ \Psi_{12} = -\frac{2R_1}{h_1},$$

$$\Psi_{14} = e^{\alpha t}\left[A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1\right] + PA_1, \ \Psi_{15} = e^{\alpha t}\left[A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2] + P\right],$$

$$\Psi_{16} = e^{\alpha t}\left[A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2] + P\right], \ \Psi_{17} = \frac{6R_1}{h_1}$$

$$\Psi_{22} = -e^{\alpha t}Q_1 - \frac{4R_1}{h_1} - \frac{4R_2}{h(t)-h_1}, \ \Psi_{24} = -\frac{2R_1}{h(t)-h_1}, \ \Psi_{27} = \frac{6R_1}{h_1}, \ \Psi_{29} = \frac{6R_2}{h(t)-h_1},$$

$$\Psi_{33} = -e^{\alpha t}Q_2 - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)}, \ \Psi_{34} = -\frac{2R_2}{h_1}, \ \Psi_{38} = \frac{6R_2}{h_2 - h(t)},$$

$$\Psi_{44} = e^{\alpha t}\left[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1\right] - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)} - \frac{4R_2}{h(t)-h_1} + \varepsilon_h F_h^T F_h,$$

$$\Psi_{45} = A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2], \Psi_{46} = A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2], \ \Psi_{48} = \frac{6R_2}{h_2 - h(t)}, \ \Psi_{49} = \frac{6R_2}{h(t)-h_1},$$

$$\Psi_{55} = e^{\alpha t}[h_1R_1 + h_{21}R_2] - I \ , \ \Psi_{56} = e^{\alpha t}[h_1R_1 + h_{21}R_2], \Psi_{66} = e^{\alpha t}[h_1R_1 + h_{21}R_2] - I,$$

$$\Psi_{77} = -\frac{12R_1}{h_1}, \ \Psi_{88} = -\frac{12R_2}{h_2 - h(t)}, \ \Psi_{99} = -\frac{12R_2}{h(t)-h_1}$$

บทแทรก ระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (16) มีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \le c_1 < c_2$ ถ้ามีสเกลาร์ $\alpha > 0$ และมีเมทริกซ์สมมาตรที่มีค่าบวกแน่นอน P, Q_1, Q_2, R_1 และ $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ และสเกลาร์บวก $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\beta_1 I < P < \beta_2 I,\ 0 < Q_1 < \beta_3 I,\ 0 < Q_2 < \beta_4 I,\ 0 < R_1 < \beta_5 I,\ 0 < R_2 < \beta_6 I,$$

และ

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{15} & \omega_{16} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ $\omega_{11} = -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T}$, $\omega_{12} = \beta_2\sqrt{c_1}$, $\omega_{13} = \beta_3\sqrt{c_1 h_1}$, $\omega_{14} = \beta_4\sqrt{c_1 h_2}$,

$$\omega_{15} = \beta_5\sqrt{c_1\left(\frac{(h_1)^2}{2}\right)}\ , \omega_{16} = \beta_6\sqrt{c_1\left(\frac{(h_2)^2-(h_1)^2}{2}\right)}\ ,$$

และ

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{11} & \hat{\Psi}_{12} & 0 & \hat{\Psi}_{14} & \hat{\Psi}_{15} & 0 & 0 \\ * & \hat{\Psi}_{22} & 0 & \hat{\Psi}_{24} & \hat{\Psi}_{25} & 0 & \hat{\Psi}_{27} \\ * & * & \hat{\Psi}_{33} & \hat{\Psi}_{34} & 0 & \hat{\Psi}_{36} & 0 \\ * & * & * & \hat{\Psi}_{44} & 0 & \hat{\Psi}_{46} & \hat{\Psi}_{47} \\ * & * & * & * & \hat{\Psi}_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \hat{\Psi}_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \hat{\Psi}_{77} \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ $h_{21} = h_2 - h_1$

$$\hat{\Psi}_{11} = e^{\alpha t}[PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_0 - \frac{4R_1}{h_1},\ \hat{\Psi}_{12} = -\frac{2R_1}{h_1},$$

$$\hat{\Psi}_{14} = e^{\alpha t}\left[A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1\right] + PA_1,\ \hat{\Psi}_{15} = \frac{6R_1}{h_1},$$

$$\hat{\Psi}_{22} = -e^{\alpha t}Q_1 - \frac{4R_1}{h_1} - \frac{4R_2}{h(t)-h_1},\ \hat{\Psi}_{24} = -\frac{2R_1}{h(t)-h_1},\ \hat{\Psi}_{25} = \frac{6R_1}{h_1},\ \hat{\Psi}_{27} = \frac{6R_2}{h(t)-h_1},$$

$$\hat{\Psi}_{33} = -e^{\alpha t}Q_2 - \frac{4R_2}{h_2-h(t)},\ \hat{\Psi}_{34} = -\frac{2R_2}{h_1},\ \hat{\Psi}_{36} = \frac{6R_2}{h_2-h(t)},$$

$$\hat{\Psi}_{44} = e^{\alpha t}\left[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1\right] - \frac{4R_2}{h_2-h(t)} - \frac{4R_2}{h(t)-h_1},\ \hat{\Psi}_{46} = \frac{6R_2}{h_2-h(t)},\ \hat{\Psi}_{47} = \frac{6R_2}{h(t)-h_1},$$

$$\hat{\Psi}_{55} = -\frac{12R_1}{h_1},\ \hat{\Psi}_{66} = -\frac{12R_2}{h_2-h(t)},\ \hat{\Psi}_{77} = -\frac{12R_2}{h(t)-h_1}$$

บทความวิจัยนี้เลือกใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟกี้และอสมการเวอร์ทิงเจอร์เพื่อให้ได้เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาใหม่ ซึ่งเงื่อนไขที่ได้ใหม่สามารถใช้ฟังก์ชันที่เป็นตัวหน่วงเชิงเวลาได้ทุกฟังก์ชัน โดยไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ เอส บี สโตจาโนวิก ในปี ค.ศ. 2016 ที่ฟังก์ชันตัวหน่วงเชิงเวลาต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้เท่านั้น

ผลการวิจัยของบทความวิจัยฉบับนี้ได้ทฤษฎีบทที่สามารถใช้ฟังก์ชันของตัวหน่วงเชิงเวลาได้หลากหลายกว่าทฤษฎีบทในงานวิจัยของ เอส บี สโตจาโนวิก ในปี ค.ศ. 2016

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ผู้วิจัยต้องขอขอบคุณคณาจารย์ โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่าง ๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

[1] Stojanovic SB., Debeljkovic DL., Antic DS. (2012). Finite-time stability and stabilization of linear time-delay systems. *Facta Univ Automat Control Robot*, 11(1), 25-36.

[2] Rojsiraphisal T., Puangmalai J. (2014). An inproved Finite-time stability and stabilization of linear system with constant delay. *Mathematical Problems in Engineering*, DOI no.: 10.1155/2014/154769.

[3] Stojanovic SB. (2016). Further improvement in delay-dependent finite-time stability criteria for uncertain continuous-time system with time varying delay. *IET Control Theory and Applications*, 10, 926-938.

[4] Puangmalai, W. & Puangmalai, P. (2019). Finitetime Stability of Linear System with Interval Time varying Delay by using Wirtingerbased inequality. *In Proceedings of The 24th Annual Meeting in Mathematics (AMM 2019)*, (pp. 159-165). Chonburi : Burapha University.