เสถียรภาพของระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยการปรับปรุงอสมการเชิงปริพันธ์

Stability of Linear Time-varying delay Systems via Modified Integral Inequality

นพดล มะยมหิน[1], วันวิสา พวงมาลัย[1*]

Noppadol Mayomhin[1], Wanwisa Puangmalai[1*]

[1]โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

[1]Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Kamphaeng Phet Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: Rakpuang.wan@gmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้มีวัตถุประสงค์ในการหาเงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลามีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ และอสมการเชิงปริพันธ์ที่เกิดจากการรวมกันของสองอสมการเชิงปริพันธ์ คือ อสมการเชิงปริพันธ์เวิลด์ทิงเจอร์ และอสมการเชิงปริพันธ์รูปแบบใหม่ และแสดงตัวอย่างที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

คำสำคัญ : เสถียรภาพ, ตัวหน่วงเชิงเวลา, อสมการเวอร์ทิงเจอร์, อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

Abstract

The main objective of this paper is to find some conditions to determine asymptotic stability for linear systems with time varying delay in term of linear matrix inequalities. Base on Lyapunov-Krasovskii functional and a new integral inequality by combining two recent integral inequalities: namely the Wirtinger integral inequality and a new integral inequality proposed in 2020. Finally, show example that correspond to the condition.

Keywords : Stability, Time delay, Wirtinger inequality, Linear Matrix Inequality

บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่าตัวหน่วงเชิงเวลาเกิดขึ้นได้บ่อยครั้งในระบบต่าง ๆ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ซึ่งเป็นแหล่งที่มาของการทำงานที่ไม่มีประสิทธิภาพ ทำให้เกิดความผันผวนหรือความไม่มีเสถียรภาพ (Sipahi, Niculescu, Abdallah, Michiels & Gu, 2011) (Fridman, 2014) ดังนั้น ปัญหาเกี่ยวกับการวิเคราะห์เสถียรภาพและการประยุกต์สำหรับการควบคุมระบบที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาเป็นสิ่งจำเป็นและมีความสำคัญเป็นอย่างมาก

ในงานวิจัยส่วนใหญ่ที่เกี่ยวข้องกับการมีเสถียรภาพของระบบที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา ซึ่งฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ (Lyapunov-Krasovskii functional (LKF)) ถูกใช้เป็นวิธีการสำคัญในการหาเงื่อนไขที่มีประสิทธิภาพที่สอดคล้องกับระบบดังกล่าว ซึ่งเงื่อนไขเหล่านี้สามารถแบ่งออกได้เป็นสองประเภท คือ เงื่อนไขการมีเสถียรภาพ

Received: Jan 31, 2023 **Revised:** May 8, 2023 **Accepted:** Jun 30, 2023

ที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา และเงื่อนไขการมีเสถียรภาพที่ไม่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยทั่วไปเงื่อนไขการมีเสถียรภาพที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา จะใช้ข้อมูลเกี่ยวกับขนาดของความหน่วงในเชิงอนุรักษ์น้อยที่สุด โดยมีงานวิจัยจำนวนมากที่แสดงให้เห็นเงื่อนไขการมีเสถียรภาพที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาในเชิงอนุรักษ์น้อยที่สุดสำหรับระบบที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (Sun, Liu, Chen, & Rees, 2010)(Zhang & Han, 2014) โดยปกติแล้วลักษณะในเชิงอนุรักษ์ของการมีเสถียรภาพดังกล่าวไม่เพียงแต่ขึ้นอยู่กับการเลือก LKFs แต่ยังขึ้นอยู่กับเงื่อนไขบางอย่างที่ใช้แยกความแตกต่างของฟังก์ชันที่สร้างขึ้น ดังนั้น เพื่อลดลักษณะในเชิงอนุรักษ์ของการมีเสถียรภาพจึงนิยมใช้สามแนวทางในการวิจัย แนวทางเหล่านี้ขึ้นอยู่กับ 1. การสร้าง LKFs แบบใหม่ขึ้นมา (Sun, Liu, Chen, & Rees, 2010) (Souza & Palhares, 2014) 2. การปรับปรุงอสมการเพื่อให้ระบบที่พิจารณาการมีเสถียรภาพและมีเงื่อนไขในการมีเสถียรภาพน้อยลง (Zhang & Han, 2014) และ 3. การเพิ่มตัวหน่วงพิเศษบางตัว เช่น เมทริกซ์น้ำหนักอิสระ (He, Wang, Xie, & Lin , 2007) การแปลงแบบจำลอง (Hien, & Phat, 2009) และการประกอบแบบหน่วงเวลา (Meng, Lam, Du, & Gao, 2010) (Zhu, Li, & Zhang, 2010)

โดยการปรับปรุงอสมการจึงเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องและเป็นปัญหาที่กว้าง ซึ่งนักวิจัยได้พยายามค้นหาวิธีแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพดังกล่าวโดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานล่าสุด (Seuret & Gouaisbaut, 2013) ได้กล่าวถึงอสมการของทฤษฎีการวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier analysis) คือ อสมการเวิลด์ทิงเจอร์ (Wirtinger inequality) ถูกนำมาใช้ในการพัฒนาปรับปรุงอย่างมีนัยสำคัญที่เรียกว่า อสมการเชิงปริพันธ์เวิลด์ทิงเจอร์ (Writinger-based integral inequality (WBI)) คุณสมบัติที่ดีและประสิทธิภาพบางอย่าง ของ WBI มีการนำมาประยุกต์ใช้ในงานวิจัยล่าสุดและถูกใช้อย่างแพร่หลาย

ในปี ค.ศ.2011 Alexandre Seuret และ Frederic Gouaisbaut ใช้อสมการ (Reciprocally convex combination) ในการหาเสถียรภาพของระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

ในปี ค.ศ.2013 Alexandre Seuret และ Frederic Gouaisbaut ทำการศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ อสมการเวิลด์ทิงเจอร์ (Wirtinger inequality)

ในปี ค.ศ.2015 Le Van Hien และ Hieu Trinh ทำการศึกษาการมีเสถียรภาพของระบบที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ อสมการเจนเซ่น (Jensen-based inequality)

ในงานวิจัยนี้ ต้องการหาเงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ โดยการใช้อสมการเชิงปริพันธ์ที่มีการปรับปรุง ระหว่างอสมการเวิลด์ทิงเจอร์ กับ อสมการเชิงปริพันธ์รูปแบบใหม่ (Puangmalai, Tongkum, & Rojsiraphisal, 2020)

ความรู้พื้นฐานของงานวิจัย

ในบทความวิจัยนี้จะนำเสนอเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา ดังนี้

ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ (Leibnitz's theorem)

ให้ $\phi(\alpha)=\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(t,\alpha)dt$ โดยที่ $a \le \alpha \le b$ ถ้า $f(t,\alpha)$ และ $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในบริเวณของระนาบ $t\alpha$ ซึ่ง $u \le t \le v$ ถ้าให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องสำหรับ $a \le \alpha \le b$ แล้ว

$$\frac{\partial \phi(\alpha)}{\partial \alpha}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(t,\alpha)dt=\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)}\frac{\partial f}{\partial \alpha}dt+f(v,\alpha)\frac{dv}{d\alpha}-f(u,\alpha)\frac{du}{d\alpha}$$

บทนิยาม 1 ถ้าอนุพันธ์ของ**ฟังก์ชันไลบูนอฟ-คราซอฟสกี้** เป็นลบแน่นอน $\dot{V}(x(t))<0$ แล้วระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา จะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

บทตั้ง 2 **อสมการเวิลด์ทิงเจอร์ (Wirtinger inequality)** คือ เมทริกซ์สมมาตรของค่าคงที่ใด ๆ $R>0$ ที่ซึ่งอนุพันธ์ของ $x:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

ถ้า $\varsigma=\begin{bmatrix} x^T(b) & x^T(a) & \frac{1}{b-a}\int_a^b x^T(u)du \end{bmatrix}^T$ แล้ว

$$\int_a^b \dot{x}^T(u)R\dot{x}(u)du \geq \frac{1}{b-a}\varsigma^T\begin{bmatrix} 4R & 2R & -6R \\ * & 4R & -6R \\ * & * & 12R \end{bmatrix}\varsigma$$

บทตั้ง 3 อสมการเชิงปริพันธ์รูปแบบใหม่ (Puangmalai, Tongkum, & Rojsiraphisal, 2020) คือ เมทริกซ์บวกแน่นอน R ที่ซึ่งอนุพันธ์ของ $x:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$\int_a^b \dot{x}^T(u)R\dot{x}(u)du \geq \frac{1}{6(b-a)}\varsigma^T\begin{bmatrix} 22R & 10R & -32R \\ * & 16R & -26R \\ * & * & 58R \end{bmatrix}\varsigma$$

เมื่อ $\varsigma=\begin{bmatrix} x^T(b) & x^T(a) & \frac{1}{b-a}\int_a^b x^T(u)du \end{bmatrix}^T$

บทตั้ง 4 อสมการ (Reciprocally convex combination in Park et al ,2011)

คือ กำหนดให้ n,m,a เป็นจำนวนเต็มบวก โดยสเกลาร์ α จะอยู่ในช่วง $(0,1)$ ต่อมากำหนดให้ $R\in\mathbf{R}^{n\times n}$ ซึ่ง $R>0$ และมีเมทริกซ์ $W_1,W_2\in\mathbf{R}^{n\times m}$ และกำหนดให้เวกเตอร์ $\varsigma\in\mathbf{R}^m$ โดยฟังก์ชัน $\Theta(\alpha\,,R)$ มีรูปสมการ ดังนี้

$$\Theta(\alpha\,,R)=\frac{1}{\alpha}\varsigma^T W_1^T R W_1\varsigma+\frac{1}{1-\alpha}\varsigma^T W_2^T R W_2\varsigma$$

และมีเมทริกซ์ $X\in\mathbf{R}^{n\times n}$ ที่ซึ่ง

$$\begin{bmatrix} R & X \\ * & R \end{bmatrix}>0$$

เป็นเมริกซ์สมมาตรบวกแน่นอนที่สอดคล้องกับอสมการ

$$\min_{\alpha\in(0,1)}\Theta(\alpha\,,R)\geq\begin{bmatrix} W_1\varsigma \\ W_2\varsigma \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} R & X \\ * & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1\varsigma \\ W_2\varsigma \end{bmatrix}$$

ผลการวิจัย

ต่อไปจะแสดงขั้นตอนการหาเงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลามีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ดังนี้

1. พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_d x(t-h(t)),\ \forall t\geq 0 \qquad (1)$$

ที่ $h(t)$ เป็นฟังก์ชันตัวหน่วงเชิงเวลา ซึ่ง $h(t)$ มีเงื่อนไขว่า $h(t)\in[h_m\,,h_M],\forall t\geq 0$

ที่ $0\leq h_m\leq h(t)\leq h_M$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $x(t)=\phi(t)$ สำหรับ $\forall t\in[-h_M\,,0]$

2. **ทฤษฎีบทที่ 1** มีเมทริกซ์ $P \in \mathbf{R}^{3n\times 3n}$ ซึ่ง $P>0$, เมทริกซ์ $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ซึ่ง $Q_1, Q_2, R_1, R_2 > 0$ และเมทริกซ์ $X \in \mathbf{R}^{3n\times 3n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอนที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (Linear Matrix Inequality (LMI)) สำหรับ $h(t)=\{h_m , h_M\}$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{15} & \omega_{16} & \omega_{17} \\ * & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} & \omega_{25} & \omega_{26} & \omega_{27} \\ * & * & \omega_{33} & \omega_{34} & \omega_{35} & \omega_{36} & \omega_{37} \\ * & * & * & \omega_{44} & \omega_{45} & \omega_{46} & \omega_{47} \\ * & * & * & * & \omega_{55} & \omega_{56} & \omega_{57} \\ * & * & * & * & * & \omega_{66} & \omega_{67} \\ * & * & * & * & * & * & \omega_{77} \end{bmatrix} < 0$$

เมื่อ $$\omega_{11} = P_{11}A + A^T P_{11} + P_{12} + P_{12}^T + Q_1 + Q_2 + A^T h_m^2 R_1 A - \frac{23}{6}R_1 + A^T h_{Mm}^2 R_2 A$$

$$\omega_{12} = -P_{12} + P_{13} - \frac{11}{6}R_1, \quad \omega_{13} = P_{11}A_d + A^T h_m^2 R_1 A_d + A^T h_{Mm}^2 R_2 A_d, \quad \omega_{14} = -P_{13}$$

$$\omega_{15} = h_m A^T P_{12} + h_m P_{22} + \frac{34}{6}R_1, \quad \omega_{16} = \left(h_M - h(t)\right)A^T P_{13} + \left(h_M - h(t)\right)P_{23},$$

$$\omega_{17} = \left(h(t) - h_m\right)A^T P_{13} + \left(h(t) - h_m\right)P_{23},$$

$$\omega_{22} = -Q_1 - \frac{20}{6}R_1 - \frac{23}{6}R_2, \quad \omega_{23} = -X_{11}^T - \frac{11}{6}R_2, \quad \omega_{24} = -X_{21}^T$$

$$\omega_{25} = -h_m P_{22} + h_m P_{23}^T + \frac{31}{6}R_1, \quad \omega_{26} = -\left(h_M - h(t)\right)P_{23} + \left(h_M - h(t)\right)P_{33} - X_{31}^T,$$

$$\omega_{27} = -\left(h(t) - h_m\right)P_{23} + \left(h(t) - h_m\right)P_{33} + \frac{34}{6}R_2,$$

$$\omega_{33} = A_d^T h_m^2 R_1 A_d + A_d^T h_{Mm}^2 R_2 A_d - \frac{23}{6}R_2 - X_{12}^T - X_{12} - \frac{20}{6}R_2, \quad \omega_{34} = -\frac{11}{6}R_2 - X_{22}^T$$

$$\omega_{35} = h_m A_d^T P_{12}, \quad \omega_{36} = \left(h_M - h(t)\right)A_d^T P_{13} + \frac{34}{6}R_2 - X_{32}^T,$$

$$\omega_{37} = \left(h(t) - h_m\right)A_d^T P_{13} - X_{13} + \frac{31}{6}R_2$$

$$\omega_{44} = -Q_2 - \frac{20}{6}R_2, \quad \omega_{45} = -h_m P_{23}^T, \quad \omega_{46} = -\left(h_M - h(t)\right)P_{33} + \frac{31}{6}R_2$$

$$\omega_{47} = -\left(h(t) - h_m\right)P_{33} - X_{23}, \quad \omega_{55} = -\frac{65}{6}R_1, \quad \omega_{56} = 0, \quad \omega_{57} = 0,$$

$$\omega_{66} = -\frac{65}{6}R_2, \quad \omega_{67} = -X_{33}, \quad \omega_{77} = -\frac{65}{6}R_2$$

ระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (1) จะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

3. พิจารณาฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟกี้ ต่อไปนี้

$$V(x_t)=V_1(x_t)+V_2(x_t)+V_3(x_t)+V_4(x_t)+V_5(x_t)$$

ที่ซึ่ง

$$V_1(x_t)=\gamma^T(t)P\gamma(t),\quad V_2(x_t)=\int_{t-h_m}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds,\quad V_3(x_t)=\int_{t-h_M}^{t}x^T(s)Q_2x(s)ds,$$

$$V_4(x_t)=h_m\int_{t-h_m}^{t}\int_{\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta,\quad V_5(x_t)=(h_M-h_m)\int_{t-h_M}^{t-h_m}\int_{\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta$$

โดยที่ $\gamma(t)=\left[x^T(t)\quad \int_{t-h_m}^{t}x^T(s)ds\quad \int_{t-h_M}^{t-h_m}x^T(s)ds\right]^T$ สำหรับเมทริกซ์ $P\in\mathbf{R}^{3n\times 3n}$

ซึ่ง $P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ * & P_{22} & P_{23}\\ * & * & P_{33}\end{bmatrix}>0$

และเมริกซ์ $Q_1,Q_2,R_1,R_2\in\mathbf{R}^{n\times n}$ ซึ่ง $Q_1,Q_2,R_1,R_2>0$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอน

4. ดำเนินการหา $\dot{V}(x_t)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x_t)&=x^T(t)\left(P_{11}A+A^TP_{11}+P_{12}+P_{12}^T\right)x(t)+x^T(t)\left(P_{11}A_d\right)x(t-h(t))\\&+x^T(t-h(t))\left(A_d^TP_{11}\right)x(t)+x^T(t)\left(-P_{12}+P_{13}\right)x(t-h_m)+x^T(t-h_m)\left(-P_{12}^T+P_{13}^T\right)x(t)\\&+x^T(t)\left(-P_{13}\right)x(t-h_M)+x^T(t-h_M)\left(-P_{13}^T\right)x(t)+\frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t}x^T(s)ds\left(h_mP_{12}^TA+h_mP_{22}\right)x(t)\\&+x^T(t)\left(h_mA^TP_{12}+h_mP_{22}\right)\frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t}x(s)ds+\frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t}x^T(s)ds\left(h_mP_{12}^TA_d\right)x(t-h(t))\\&+x^T(t-h(t))\left(h_mA_d^TP_{12}\right)\frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t}x(s)ds+\frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t}x^T(s)ds\left(-h_mP_{22}+h_mP_{23}\right)x(t-h_m)\\&+x^T(t-h_m)\left(-h_mP_{22}+h_mP_{23}^T\right)\frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t}x(s)ds+\frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t}x^T(s)ds\left(-h_mP_{23}\right)x(t-h_M)\end{aligned}$$

$$+x^T(t-h_M)\left(-h_m P_{23}^T\right)\frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t} x(s)ds$$

$$+\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s)ds\left(\left(h_M-h(t)\right)P_{13}^T A+\left(h_M-h(t)\right)P_{23}^T\right)x(t)$$

$$+x^T(t)\left(\left(h_M-h(t)\right)A^T P_{13}+\left(h_M-h(t)\right)P_{23}\right)\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds$$

$$+\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x^T(s)ds\left(\left(h(t)-h_m\right)P_{13}^T A+\left(h(t)-h_m\right)P_{23}^T\right)x(t)$$

$$+x^T(t)\left(\left(h(t)-h_m\right)A^T P_{13}+\left(h(t)-h_m\right)P_{23}\right)\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x(s)ds$$

$$+\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s)ds\left(\left(h_M-h(t)\right)P_{13}^T A_d\right)x\left(t-h(t)\right)$$

$$+x^T\left(t-h(t)\right)\left(\left(h_M-h(t)\right)A_d^T P_{13}\right)\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds$$

$$+\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x^T(s)ds\left(\left(h(t)-h_m\right)P_{13}^T A_d\right)x\left(t-h(t)\right)$$

$$+x^T\left(t-h(t)\right)\left(\left(h(t)-h_m\right)A_d^T P_{13}\right)\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x(s)ds$$

$$+\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s)ds\left(-\left(h_M-h(t)\right)P_{23}^T+\left(h_M-h(t)\right)P_{33}\right)x(t-h_m)$$

$$+x^T(t-h_m)\left(-\left(h_M-h(t)\right)P_{23}+\left(h_M-h(t)\right)P_{33}\right)\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds$$

$$+\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x^T(s)ds\left(-\left(h(t)-h_m\right)P_{23}^T+\left(h(t)-h_m\right)P_{33}\right)x(t-h_m)$$

$$+x^T(t-h_m)\left(-\left(h(t)-h_m\right)P_{23}+\left(h(t)-h_m\right)P_{33}\right)\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x(s)ds$$

$$+\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s)ds\left(-\left(h_M-h(t)\right)P_{33}\right)x(t-h_M)$$

$$+x^T(t-h_M)\left(-\left(h_M-h(t)\right)P_{33}\right)\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds$$

$$+\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x^T(s)ds\left(-\left(h(t)-h_m\right)P_{33}\right)x(t-h_M)$$

$$+x^T(t-h_M)\left(-\left(h(t)-h_m\right)P_{33}\right)\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x(s)ds$$

โดยทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ จะได้ว่า

$\dot{V}_2(x_t)=x^T(t)Q_1x(t)-x^T(t-h_m)Q_1x(t-h_m)$,

$\dot{V}_3(x_t)=x^T(t)Q_2x(t)-x^T(t-h_M)Q_2x(t-h_M)$

โดยทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ , บทตั้ง 2 อสมการเวิลด์ทิงเจอร์ และบทตั้ง 3 อสมการเชิงปริพันธ์รูปแบบใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{V}_4\left(x_t\right) \le\ & h_m^2 x^T(t) A^T R_1 A x(t) + h_m^2 x^T(t) A^T R_1 A_d x(t-h(t)) + h_m^2 x^T(t-h(t)) A_d^T R_1 A x(t) \\
& + h_m^2 x^T(t-h(t)) A_d^T R_1 A_d x(t-h(t)) - x^T(t)\frac{23}{6} R_1 x(t) - x^T(t-h_m)\frac{11}{6} R_1 x(t) \\
& + \frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t} x^T(s)ds \frac{34}{6} R_1 x\left(t\right) - x^T(t)\frac{11}{6} R_1 x(t-h_m) - x^T(t-h_m)\frac{20}{6} R_1 x(t-h_m) \\
& + \frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t} x^T(s)ds \frac{31}{6} R_1 x(t-h_m) + x^T(t)\frac{34}{6} R_1 \frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t} x(s)ds \\
& + x^T(t-h_m)\frac{31}{6} R_1 \frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t} x(s)ds - \frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t} x^T(s)ds \frac{65}{6} R_1 \frac{1}{h_m}\int_{t-h_m}^{t} x(s)ds
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ , บทตั้ง 2 อสมการเวิลด์ทิงเจอร์ , บทตั้ง 3 อสมการเชิงปริพันธ์รูปแบบใหม่ และบทตั้ง 4 อสมการ (Reciprocally convex combination) โดยกำหนด $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{V}_5\left(x_t\right) \le\ & h_{Mm}^2 x^T(t) A^T R_2 A x(t) + h_{Mm}^2 x^T(t) A^T R_2 A_d x(t-h(t)) + h_{Mm}^2 x^T(t-h(t)) A_d^T R_2 A x(t) \\
& + h_{Mm}^2 x^T(t-h(t)) A_d^T R_2 A_d x(t-h(t)) - x^T(t-h(t))\frac{23}{6} R_2 x(t-h(t)) \\
& - x^T(t-h_M)\frac{11}{6} R_2 x(t-h(t)) + \frac{1}{h_M - h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s)ds \frac{34}{6} R_2 x(t-h(t)) \\
& - x^T(t-h_m) X_{11}^T x(t-h(t)) - x^T(t-h(t)) X_{12}^T x(t-h(t)) \\
& - \frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x^T(s)ds X_{13}^T x(t-h(t)) - x^T(t-h(t))\frac{11}{6} R_2 x(t-h_M) \\
& - x^T(t-h_M)\frac{20}{6} R_2 x(t-h_M) + \frac{1}{h_M - h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s)ds \frac{31}{6} R_2 x(t-h_M) \\
& - x^T(t-h_m) X_{21}^T x(t-h_M) - x^T(t-h(t)) X_{22}^T x(t-h_M) \\
& - \frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m} x^T(s)ds X_{23}^T x(t-h_M) + x^T(t-h(t))\frac{34}{6} R_2 \frac{1}{h_M - h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds \\
& + x^T(t-h_M)\frac{31}{6} R_2 \frac{1}{h_M - h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds \\
& - \frac{1}{h_M - h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x^T(s)ds \frac{65}{6} R_2 \frac{1}{h_M - h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)} x(s)ds
\end{aligned}$$

$$-x^T(t-h_m)X_{31}^T\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)}x(s)ds-x^T(t-h(t))X_{32}^T\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)}x(s)ds$$

$$-\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x^T(s)dsX_{33}^T\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)}x(s)ds-x^T(t-h(t))X_{11}x(t-h_m)$$

$$-x^T(t-h_M)X_{21}x(t-h_m)-\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)}x^T(s)dsX_{31}x(t-h_m)-x^T(t-h_m)\frac{23}{6}R_2x(t-h_m)$$

$$-x^T(t-h(t))\frac{11}{6}R_2x(t-h_m)+\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x^T(s)ds\frac{34}{6}R_2x(t-h_m)$$

$$-x^T(t-h(t))X_{12}x(t-h(t))-x^T(t-h_M)X_{22}x(t-h(t))$$

$$-\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)}x^T(s)dsX_{32}x(t-h(t))-x^T(t-h_m)\frac{11}{6}R_2x(t-h(t))$$

$$-x^T(t-h(t))\frac{20}{6}R_2x(t-h(t))+\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x^T(s)ds\frac{31}{6}R_2x(t-h(t))$$

$$-x^T(t-h(t))X_{13}\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x(s)ds-x^T(t-h_M)X_{23}\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x(s)ds$$

$$-\frac{1}{h_M-h(t)}\int_{t-h_M}^{t-h(t)}x^T(s)dsX_{33}\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x(s)ds$$

$$+x^T(t-h_m)\frac{34}{6}R_2\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x(s)ds+x^T(t-h(t))\frac{31}{6}R_2\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x(s)ds$$

$$-\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x^T(s)ds\frac{65}{6}R_2\frac{1}{h(t)-h_m}\int_{t-h(t)}^{t-h_m}x(s)ds$$

นำ $\dot{V}(x_t)$ มารวมกัน ซึ่ง $\dot{V}(x_t)\le\dot{V}_1(x_t)+\dot{V}_2(x_t)+\dot{V}_3(x_t)+\dot{V}_4(x_t)+\dot{V}_5(x_t)$

จะได้ว่า

$$\dot{V}(x_t)\le\varsigma^T\omega\varsigma \qquad (2)$$

โดยที่

$$\omega<0 \qquad (3)$$

นั่นคือ

$$\varsigma^T\omega\varsigma<0 \qquad (4)$$

จากอสมการ (2) และ (3) จะได้

$$\dot{V}(x_t)<0 \qquad (5)$$

นั่นคือ $\dot{V}(x_t)<0$

ดังนั้น ระบบสมการ (1) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับตามบทนิยาม 1 □

สรุปผล

จากทฤษฎีบทที่ 1 ข้างต้น สามารถสรุปได้ว่าจำนวนตัวแปรในเงื่อนไขของการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับในทฤษฎีบทที่ 1 มีจำนวนตัวแปรน้อยกว่าจำนวนตัวแปรในเงื่อนไขงานวิจัยของ Lee, Park และ Kwon ในปี ค.ศ. 2023 (Lee, Park & Kwon, 2023)

ต่อไปจะเป็นการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทที่ 1 และแสดงผลเชิงตัวเลข ดังนี้

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา จากเมทริกซ์ตัวอย่างของ Lee, Park และ Kwon ในปี ค.ศ. 2023

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\quad A_d=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

เมื่อพิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาโดยใช้เมทริกซ์ตัวอย่างกับทฤษฎีบทที่ 1 ด้วยโปรแกรม MATLAB ดังนี้

$$P_{11}=1.0e+06*\begin{bmatrix}5.1047 & -0.4171\\ -0.4171 & 2.9248\end{bmatrix},\quad P_{12}=1.0e+06*\begin{bmatrix}0.0122 & -0.3729\\ -0.4569 & -2.0798\end{bmatrix},$$

$$P_{13}=1.0e+06*\begin{bmatrix}0.2035 & -0.0903\\ -0.1884 & -0.6488\end{bmatrix},\quad P_{22}=1.0e+06*\begin{bmatrix}5.3796 & 0.4449\\ 0.4449 & 6.5151\end{bmatrix},$$

$$P_{23}=1.0e+06*\begin{bmatrix}1.1857 & 0.0234\\ 0.2604 & 1.2008\end{bmatrix},\quad P_{33}=1.0e+06*\begin{bmatrix}1.3087 & -0.0293\\ -0.0293 & 0.9275\end{bmatrix},$$

$$Q_1=1.0e+06*\begin{bmatrix}5.9134 & -0.2967\\ -0.2967 & 2.7292\end{bmatrix},\quad Q_2=1.0e+06*\begin{bmatrix}3.2797 & -0.5580\\ -0.5580 & 1.0428\end{bmatrix},$$

$$R_1=1.0e+05*\begin{bmatrix}3.8484 & 0.0111\\ 0.0111 & 3.8580\end{bmatrix},\quad R_2=1.0e+05*\begin{bmatrix}3.5286 & 0.4396\\ 0.4396 & 5.0341\end{bmatrix},$$

$$X_{11}=1.0e+05*\begin{bmatrix}0.4574 & -1.0618\\ -0.3996 & -0.8232\end{bmatrix},\quad X_{12}=1.0e+05*\begin{bmatrix}2.8523 & 0.0823\\ 1.3539 & 5.2836\end{bmatrix},$$

$$X_{13}=1.0e+05*\begin{bmatrix}-3.3097 & 0.9795\\ -0.9543 & -4.4604\end{bmatrix},\quad X_{21}=1.0e+05*\begin{bmatrix}-0.1132 & 1.0101\\ 1.7135 & 2.3031\end{bmatrix},$$

$$X_{22}=1.0e+05*\begin{bmatrix}0.9268 & -0.7009\\ -0.6552 & -0.2180\end{bmatrix},\quad X_{23}=1.0e+05*\begin{bmatrix}-0.8136 & -0.3092\\ -1.0583 & -2.0851\end{bmatrix},$$

$$X_{31}=1.0e+05*\begin{bmatrix}-0.3443 & 0.0517\\ -1.3139 & -1.4799\end{bmatrix},\quad X_{32}=1.0e+05*\begin{bmatrix}-3.7791 & 0.6186\\ -0.6987 & -5.0655\end{bmatrix},$$

$$X_{33}=1.0e+05*\begin{bmatrix}4.1233 & -0.6703\\ 2.0126 & 6.5455\end{bmatrix}$$

จากผลเชิงตัวเลขข้างต้น จะได้เมทริกซ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 1 และได้ค่าคงที่ตัวหน่วงเชิงเวลา h(t) ที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพในช่วง [0,1.1]

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ผู้วิจัยต้องขอขอบคุณคณาจารย์ โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่าง ๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

กรรณิกา เกียนวัฒนา. (2552). พีชคณิตเชิงเส้น. (พิมพ์ครั้งที่ 16). เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง และศรีบุตร แววเจริญ. (2545). คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์. (พิมพ์ครั้งที่2). กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

ดำรง ทิพย์โยธา และเพ็ญพรรณ ยังคง. (2539). พีชคณิตเชิงเส้น. (พิมพ์ครั้งที่2). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ลำดวน ยอดยิ่ง. (2546). แคลคูลัส 1-1. (พิมพ์ครั้งที่2). กรุงเทพฯ: The Knowledge Center.

วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ. (2546). ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์แคลคูลัส. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ท้อป.

อติชาต เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus). (พิมพ์ครั้งที่6). เชียงใหม่. มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

Briat, C., and Seuret, A. (2012). Convex dwell-time characterizations for uncertain linear impulsive systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 57(12), 3241-3246.

Fridman, E. (2014), Introduction to time-delay systems: analysis and control.

Fridman, E. and Shaked, U. (2002). A descriptor system approach to H_∞ control of time-delay systems, IEEE Trans. Autom. Control, 47, (2), 253-270.

Lee, S. H., Park, M. J., & Kwon, O. M. (2023). Advanced stability analysis for linear systems with time-varying delays via a generalized integral inequality. Applied Mathematics Letters, 140, 108566.

He, Y., Wang, Xie, L. and Lin, C. (2007). Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay, IEEE Trans. Autom. Control, 52, (2), 293-299.

Hien, L.V., An, N.T. and Trinh, H., (2014). New results on state bounding for discrete-time systems with interval time-varying delay and bounded disturbance inputs, IET Control Theory Appl., 8, (14), 1405-1414.

Hien, L.V. and Phat, V.N. (2009). Exponential stability and stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems, J. Franklin Inst., 346, (6), 611-625.

Meng, X.Y., Lam, J., Du, B.Z. and Gao, H.J. (2010). A delay-partitioning approach to the stability analysis of discrete-time systems, Automatica, 46, (3), 610-614.

Park, P.G., Ko, J.W. and Jeong, C. (2011). Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays, Automatica, 47, (1), 235-238.

Puangmalai, J., Tongkum, J., and Rojsiraphisal, T. (2020). Finite-time stability criteria of linear system with non-differentiable time-varying delay via new integral inequality. Mathematics and Computers in Simulation, 171, 170-186.

Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013). Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems. Automatica, Elsevier, 49(9), 2860-2866.

Sipahi, R., Niculescu, S. I., Abdallah, C.T., Michiels, W., Gu, K. (2011). Stability and stabilization of systems with time delay, IEEE Control Syst., 31, (1), 38-65.

Souza, F.O. and Palhares, R.M. (2014). New delay-interval stability condition, Int. J. Syst. Sci., 45, (3), 300-306.

Sun, J., Liu, G.P., Chen, J. and Rees, D. (2010). Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays, Automatica, 46, (2), 466-470.

Zhang, X. M. and Han, Q. L. (2014). New stability criterion using a matrix-based quadratic convex approach and some novel integral inequalities, IET Control Theory Appl., 8, (12), 1054-1061.

Zhu, S., Li, Z. and Zhang, C. (2010). Delay decomposition approach to delay-dependent stability for singular time-delay systems, IET Control Theory Appl., 4, (11), 2613-2620.