การแก้ปัญหาในทฤษฎีจำนวนโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
Solving Problems in Number Theory by Principle of Mathematical Induction

ทศวรรต รัตรดา[1] และชลธิศ เสือนุ่ม[2]
Todsawat Ratda[1] and Cholatis Suanoom[2]

[1]โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
[2]ศูนย์วิทยาศาสตร์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

บทคัดย่อ

การทำวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อหาสูตรทั่วไปของความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และพิสูจน์สูตรทั่วไปของความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งได้สูตรทั่วไปทั้งหมดดังต่อไปนี้

1. $\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\dots+\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}=\frac{n}{1+(n)p}, \forall n\in\square, \exists p\in\square$

2. $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\dots+\frac{1}{(a+(n-1))(a+(n))}=\frac{n}{a(a+(n))}, \forall n\in\square, \exists a\in\square$

3. $\frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+p)(a+2p)}+\dots+\frac{1}{(a+(n-1)p)(a+np)}=\frac{n}{(a)(a+np)}$

$, \forall n\in\square, \exists p,a\in\square$

คำสำคัญ: สูตรทั่วไป/ โจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์/ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

Abstract

The purpose of this research were to find the general formula for the relationship of mathematical induction problems and to prove the general formula for the relationship of mathematical induction problems by using mathematical induction. The results of the study were as follows:

1. $\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\dots+\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}=\frac{n}{1+(n)p}, \forall n\in\square, \exists p\in\square$

2. $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\dots+\frac{1}{(a+(n-1))(a+(n))}=\frac{n}{a(a+(n))}, \forall n\in\square, \exists a\in\square$

3. $\frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+p)(a+2p)}+\dots+\frac{1}{(a+(n-1)p)(a+np)}=\frac{n}{(a)(a+np)}$

$, \forall n\in\square, \exists p,a\in\square$

Keywords: general formula/ mathematical induction problems/ mathematical induction

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์เป็นอย่างมาก เป็นศาสตร์ที่มุ่งค้นคว้าเกี่ยวกับโครงสร้างนามธรรมที่กำหนดขึ้นผ่านทางกลุ่มของสัจพจน์ ซึ่งมีการให้เหตุผลที่แน่นอนโดยใช้ตรรกศาสตร์ เรามัก

นิยามโดยทั่วไปว่า คณิตศาสตร์เป็นสาขาวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับแบบรูป โครงสร้าง การเปลี่ยนแปลง และปริภูมิ กล่าวอีกนัยหนึ่งว่าสนใจในเรื่องของรูปร่างและจำนวนอีกทั้งเป็นแหล่งกำเนิดปัญหาทางปรัชญาที่สำคัญแหล่งหนึ่ง ซึ่งได้เริ่มต้นขึ้นในหมู่ชาวกรีกโบราณ สำหรับชาวกรีกนั้นส่วนสำคัญของคณิตศาสตร์ คือ จำนวน ซึ่งจำนวนเป็นสิ่งที่ชวนคิดและท้าท้ายความสามารถ มีความง่ายที่จะเข้าใจประกอบกับปัญหาแต่ละปัญหาดูเหมือนมีโอกาสที่หาคำตอบได้ นอกจากนี้ยังมีข้อคาดเดาและปัญหาที่ยังไม่สามารถหาคำตอบได้อีกมากมาย

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่สามารถพิสูจน์ได้และยังมีวิธีที่หลากหลายที่ใช้ในการพิสูจน์ ซึ่งเครื่องมือพื้นฐานที่ใช้ในการพิสูจน์คือ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบทและสูตรต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งหนังสือรวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และสารพันปัญหาคณิตศาสตร์ (ดำรงค์ ทิพย์โยธา, 2543) โดยหนังสือเล่มนี้ได้รวบรวมตัวอย่างโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และโจทย์คณิตศาสตร์ไว้เป็นจำนวนมาก โดยหนังเล่มนี้ได้นำเสนอ หลักการ แนวคิด และวิธีการในการพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ โดยสืบค้นข้อมูลจากอ้างอิงต่อไปนี้ (ณรงค์ ปั้นนิ่ม และนิติยา ปภาพจน์, 2548, ดำรงค์ ทิพย์โยธา, 2556, พัฒนี อุดมกะวานิช, 2545 และอำพล ธรรมเจริญ, 2551)

ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ โดยวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของจำนวนและหาผลลัพธ์ และได้นำหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มาเป็นแนวทางในการพิสูจน์ เพื่อหาสูตรทั่วไปของโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การทำวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยคาดหวังว่าจะได้สูตรทั่วไปซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจจะศึกษาในเรื่อง โจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อหาสูตรทั่วไปของความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
2. เพื่อพิสูจน์สูตรทั่วไปของความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

วิธีดำเนินการวิจัยประกอบด้วย ขั้นแผนงาน ขั้นปฏิบัติ ขั้นตรวจสอบ

1. ศึกษาเนื้อหาเรื่องสมบัติจำนวนนับเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะ จำนวนประกอบ การหารร่วมมาก การคูณร่วมน้อย
2. ศึกษาเนื้อหาลำดับเลขคณิตเกี่ยวกับการหาพจน์ที่ n ของลำดับ
3. ศึกษาการพิสูจน์ของหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแนวทางในการพิสูจน์ในการหาสูตรทั่วไปของการบวกของจำนวน
4. ศึกษาโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
5. คำนวณหาสูตร
6. พิสูจน์สูตรโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จากการศึกษาโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งได้พิจารณาสามสูตรดังต่อไปนี้

<u>สูตรที่ 1</u> พิจารณา $\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\ldots$

ขั้นที่ 1 พิจารณาลำดับ

1. พิจารณาลำดับ $1,(1+p),(1+2p),(1+3p),\ldots$

จากการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

นั้นคือ $a_n=a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_1=1$, $d=(1+p)-1=p$

จาก $a_n=a_1+(n-1)d$

$=1+(n-1)p$

พจน์ทั่วไปของลำดับคือ $a_n=1+(n-1)p$

นั้นคือ $1,(1+p),(1+2p),(1+3p),\ldots,1+(n-1)p$

2. พิจารณาลำดับ $(1+p),(1+2p),(1+3p),(1+4p),\ldots$

จากการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

นั้นคือ $a_n=a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_1=1+p$, $d=(1+p)-1=p$ $,d=(1+2p)-(1+p)=p$

จาก $a_n=a_1+(n-1)d$

$=(1+p)+(n-1)p$

$=(1+p)+pn-p$

$a_n=1+np$.

พจน์ทั่วไปของลำดับคือ $a_n=1+np$

นั้นคือ $(1+p),(1+2p),(1+3p),(1+4p),\ldots,1+np$

ดังนั้นจากการพิจารณาสองลำดับข้างต้นจึงสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\ldots+\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}$$

ขั้นที่ 2 การคำนวณหาสูตร

พิจารณาพจน์ที่ 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1)(1+p)}&=\frac{p}{p}\left(\frac{1}{1\cdot(1+p)}\right)\\&=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{1\cdot(1+p)}\right)\\&=\frac{1}{p}\left(\frac{(1+p)-1}{1\cdot(1+p)}\right)\\&=\frac{1}{p}\left(\frac{(1+p)}{1\cdot(1+p)}-\frac{1}{1\cdot(1+p)}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot(1+p)}\right)$$

พิจารณาพจน์ที่ 2
$$\frac{1}{(1+p)(1+2p)}=\frac{p}{p}\left(\frac{1}{(1+p)(1+2p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{(1+p)(1+2p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{[(1+p)+p]-(1+p)}{(1+p)(1+2p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{[(1+p)+p]}{(1+p)(1+2p)}-\frac{1+p}{(1+p)(1+2p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{(1+p)}-\frac{1}{(1+2p)}\right)$$
$$\vdots$$

พิจารณาพจน์ที่ n
$$\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}=\frac{p}{p}\left(\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{[(1+(n-1)p)+p]-(1+(n-1)p)}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{[(1+(n-1)p)+p]}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}-\frac{(1+(n-1)p)}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1+np-p+p}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}-\frac{1+np-p}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1+np}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}-\frac{1+(n-1)p}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{(1+(n-1)p)}-\frac{1}{(1+(n)p)}\right)$$

จะได้ $\frac{1}{p}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot(1+p)}\right)+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{(1+p)}-\frac{1}{(1+2p)}\right)+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{1+(n-1)p}-\frac{1}{1+(n)p}\right)$
$$=\frac{1}{p}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+p}\right)+\left(\frac{1}{1+p}-\frac{1}{1+2p}\right)+\left(\frac{1}{1+2p}-\frac{1}{1+3p}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1+(n-1)p}-\frac{1}{1+(n)p}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+p}+\frac{1}{1+p}-\frac{1}{1+2p}+\ldots+\frac{1}{1+(n-1)p}-\frac{1}{1+(n)p}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+(n)p}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{(1+(n)p-1)}{1+(n)p}\right)$$

$$=\frac{n}{1+(n)p}$$

นั่นคือ $\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\ldots+\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}=\frac{n}{1+(n)p}$

ขั้นที่ 3 การพิสูจน์

$$\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\ldots+\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}=\frac{n}{1+(n)p},\forall n\in\mathbb{N}$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\ldots+\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}=\frac{n}{1+(n)p},\forall n\in\mathbb{N}$$

(1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$n=1\rightarrow \frac{1}{(1)(1+p)}=\frac{1}{(1+p)}=\frac{1}{1+(1)p}$ $\therefore P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\ldots+\frac{1}{(1+(k-1)p)(1+(k)p)}=\frac{k}{1+(k)p},\forall k\in\mathbb{N}.$$

พิจารณา $P(k+1)$

$$\frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\ldots+\frac{1}{(1+(k-1)p)(1+(k)p)}+\frac{1}{(1+kp)(1+(k+1)p)}$$

$$=\frac{k}{1+(k)p}+\frac{1}{(1+kp)(1+(k+1)p)}$$

$$=\frac{k}{1+(k)p}+\frac{1}{(1+kp)(1+kp+p)}$$

$$=\frac{k(1+(k+1)p)+1}{(1+kp)(1+(k+1)p)}$$

$$=\frac{k+k^2p+kp+1}{(1+kp)(1+(k+1)p)}$$

$$=\frac{k+1+kp(k+1)}{(1+kp)(1+(k+1)p)}$$

$$=\frac{(k+1)(kp+1)}{(1+kp)(1+(k+1)p)}$$

$$=\frac{(k+1)}{(1+(k+1)p)}$$

$\therefore \quad P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(n)$ เป็นจริงทุก $n \in \mathbb{N}$

<u>สูตรที่ 2</u> พิจารณา $\quad \frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots$

ขั้นที่ 1 พิจารณาลำดับ

1. พิจารณาลำดับ $a,(a+1),(a+2),(a+3),\ldots$

จากการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

นั้นคือ $a_n=a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_1=a,d=[(a+1)-a]=1$

จาก $\quad a_n=a_1+(n-1)d$

$=a+(n-1)1$

$=a+(n-1)$

พจน์ทั่วไปของลำดับคือ $a_n=a+(n-1)$

นั้นคือ $a,(a+1),(a+2),(a+3),\ldots,a+(n-1)$

2. พิจารณาลำดับ $(a+1),(a+2),(a+3),(a+4),\ldots$

จากการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

นั้นคือ $a_n=a_1+(n-1)d$

จะได้ $a_1=a+1,d=(a+2)-(a+1)=1$

จาก $\quad a_n=a_1+(n-1)d$

$=(a+1)+(n-1)1$

$=a+n$

พจน์ทั่วไปของลำดับคือ $a_n=a+n$

นั้นคือ $(a+1),(a+2),(a+3),(a+4),\ldots,a+n$

ดังนั้นจากการพิจารณาสองลำดับข้างต้นจึงสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1))(a+(n))}$$

ขั้นที่ 2 การคำนวณหาสูตร

พิจารณาพจน์ที่ 1

$$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{a+1-a}{a(a+1)}$$

$$=\frac{(a+1)-a}{a(a+1)}$$

$$=\frac{(a+1)}{a(a+1)}-\frac{a}{a(a+1)}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{(a+1)}$$

พิจารณาพจน์ที่ 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{(a+1)(a+2)} &= \frac{(a+1)+1-(a+1)}{(a+1)(a+2)}\\ &= \frac{[(a+1)+1]-(a+1)}{(a+1)(a+2)}\\ &= \frac{[(a+1)+1]}{(a+1)(a+2)}-\frac{(a+1)}{(a+1)(a+2)}\\ &= \frac{a+2}{(a+1)(a+2)}-\frac{a+1}{(a+1)(a+2)}\\ &= \frac{1}{(a+1)}-\frac{1}{(a+2)}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

พิจารณาพจน์ที่ n

$$\begin{aligned}\frac{1}{(a+(n-1))(a+n)} &= \frac{(a+(n-1))+1-(a+(n-1))}{(a+(n-1))(a+n)}\\ &= \frac{[(a+(n-1))+1]-(a+(n-1))}{(a+(n-1))(a+n)}\\ &= \frac{[(a+(n-1))+1]}{(a+(n-1))(a+n)}-\frac{(a+(n-1))}{(a+(n-1))(a+n)}\\ &= \frac{a+n}{(a+(n-1))(a+n)}-\frac{(a+(n-1))}{(a+(n-1))(a+n)}\\ &= \frac{1}{(a+(n-1))}-\frac{1}{(a+n)}\end{aligned}$$

จะได้ $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a+(n-1)}-\frac{1}{a+(n)}\right)$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+(n-1)}-\frac{1}{a+(n)}\\ &=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+(n)}\\ &=\frac{(a+(n)-a)}{a(a+(n))}\\ &=\frac{n}{a(a+(n))}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1))(a+(n))}=\frac{n}{a(a+(n))}$

ขั้นที่ 3 การพิสูจน์

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1))(a+(n))}=\frac{n}{a(a+(n))},\forall n\in\square$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1))(a+(n))}=\frac{n}{a(a+(n))},\forall n\in\square,\exists a\in\square$$

(1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$n=1\rightarrow\ \frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+(1))}\qquad\therefore\ P(1)\text{ เป็นจริง}$$

(2) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+(k-1))(a+(k))}=\frac{k}{a(a+(k))},\forall k\in\square,\exists a\in\square$$

พิจารณา $P(k+1)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+(k-1))(a+(k))}+\frac{1}{(a+k)(a+(k+1))}\\
&=\frac{k}{a(a+(k))}+\frac{1}{(a+k)(a+(k+1))}\\
&=\frac{k(a+(k+1))+a}{a(a+k)(a+(k+1))}\\
&=\frac{ka+k^2+k+a}{a(a+k)(a+(k+1))}\\
&=\frac{(ka+a)+(k^2+k)}{a(a+k)(a+(k+1))}\\
&=\frac{a(k+1)+k(k+1)}{a(a+k)(a+(k+1))}\\
&=\frac{(k+1)(a+k)}{a(a+k)(a+(k+1))}\\
&=\frac{(k+1)}{a(a+(k+1))}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(n)$ เป็นจริงทุก $n\in\square$

<u>สูตรที่ 3</u> พิจารณา $\dfrac{1}{a(a+p)}+\dfrac{1}{(a+p)(a+2p)}+\ldots$

ขั้นที่ 1 พิจารณาลำดับ

1. พิจารณาลำดับ $a,(a+p),(a+2p),(a+3p),\ldots$

จากการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

นั่นคือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_1 = a, d = (a+p) - a = p$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$= a + (n-1)p$

พจน์ทั่วไปของลำดับคือ $a_n = a + (n-1)p$

นั่นคือ $a, (a+p), (a+2p), (a+3p), \ldots, a+(n-1)p$

2. พิจารณาลำดับ $(a+p), (a+2p), (a+3p), (a+4p), \ldots$

จากการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

นั่นคือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_1 = a+p, d = (a+2p) - (a+p) = p$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$= (a+p) + (n-1)p$

$= (a+p) + np - p$

$= a + np$

พจน์ทั่วไปของลำดับคือ $a_n = a + np$

นั่นคือ $(a+p), (a+2p), (a+3p), (a+4p), \ldots, a+np$

ดังนั้นจากการพิจารณาสองลำดับข้างต้นจึงสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{a(a+p)} + \frac{1}{(a+p)(a+2p)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)p)(a+np)}$$

ขั้นที่ 2 การคำนวณหาสูตร

พิจารณาพจน์ที่ 1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a(a+p)} &= \frac{p}{p}\left(\frac{1}{a(a+p)}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{p}{a(a+p)}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{a+p-a}{a(a+p)}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{(a+p)-a}{a(a+p)}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{(a+p)}{a(a+p)} - \frac{a}{a(a+p)}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{(a+p)}\right)
\end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่ 2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a+p)(a+2p)} &= \frac{p}{p}\left(\frac{1}{(a+p)(a+2p)}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{p}{(a+p)(a+2p)}\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{(a+p)+p-(a+p)}{(a+p)(a+2p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{(a+p)+p}{(a+p)(a+2p)}-\frac{(a+p)}{(a+p)(a+2p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{a+2p}{(a+p)(a+2p)}-\frac{a+p}{(a+p)(a+2p)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{(a+p)}-\frac{1}{(a+2p)}\right)$$
$$\vdots$$

พิจารณาพจน์ที่ n

$$\frac{1}{a+(n-1)p(a+np)}=\frac{p}{p}\left(\frac{1}{a+(n-1)p(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{a+(n-1)p(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{(a+(n-1)p)+p-(a+(n-1)p)}{a+(n-1)p(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{[(a+(n-1)p)+p]-(a+(n-1)p)}{a+(n-1)p(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{[(a+(n-1)p)+p]}{a+(n-1)p(a+np)}-\frac{(a+(n-1)p)}{a+(n-1)p(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{[a+np-p+p]}{a+(n-1)p(a+np)}-\frac{(a+(n-1)p)}{a+(n-1)p(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{a+np}{a+(n-1)p(a+np)}-\frac{(a+(n-1)p)}{a+(n-1)p(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a+(n-1)p}-\frac{1}{(a+np)}\right)$$

จะได้ $\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{(a+p)}\right)+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{(a+p)}-\frac{1}{(a+2p)}\right)+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{(a+(n-1)p)}-\frac{1}{(a+np)}\right)$

$$=\frac{1}{p}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{(a+p)}\right)+\left(\frac{1}{(a+p)}-\frac{1}{(a+2p)}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(a+(n-1)p)}-\frac{1}{(a+np)}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{(a+p)}+\frac{1}{(a+p)}-\frac{1}{(a+2p)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)p)}-\frac{1}{(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{(a+np)}\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{(a+np)-(a)}{(a)(a+np)}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{np}{(a)(a+np)}\right)$$

$$=\frac{n}{(a)(a+np)}$$

นั่นคือ $\frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+p)(a+2p)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)p)(a+np)}=\frac{n}{(a)(a+np)}$

ขั้นที่ 3 การพิสูจน์

$$\frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+p)(a+2p)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)p)(a+np)}=\frac{n}{(a)(a+np)},\forall n\in\mathbb{N}$$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+p)(a+2p)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)p)(a+np)}=\frac{n}{(a)(a+np)},\forall n\in\mathbb{N}\ ,$$

$\exists a,p\in\mathbb{N}$

(1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$n=1\rightarrow\ \frac{1}{a(a+p)}=\frac{1}{a(a+p)}=\frac{1}{(a)(a+(1)p)}\qquad\therefore\ P(1)\text{ เป็นจริง}$$

(2) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+p)(a+2p)}+\ldots+\frac{1}{(a+(k-1)p)(a+kp)}=\left(\frac{k}{(a)(a+kp)}\right),\forall k\in\mathbb{N}$$

$\exists a,p\in\mathbb{N}$

พิจารณา $P(k+1)$

$$\frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+p)(a+2p)}+\ldots+\frac{1}{(a+(k-1)p)(a+kp)}+\frac{1}{(a+kp)(a+(k+1)p)}$$

$$=\frac{k}{a(a+(k)p)}+\frac{1}{(a+kp)(a+(k+1)p)}$$

$$=\frac{k(a+(k+1)p)+(a)}{a(a+kp)(a+(k+1)p)}$$

$$=\frac{ka+k^2p+kp+a}{a(a+kp)(a+(k+1)p)}$$

$$=\frac{(ka+a)+(k^2p+kp)}{a(a+kp)(a+(k+1)p)}$$

$$=\frac{a(k+1)+kp(k+1)}{a(a+kp)(a+(k+1)p)}$$

$$=\frac{(k+1)(a+kp)}{a(a+kp)(a+(k+1)p)}$$

$$= \frac{(k+1)}{a(a+(k+1)p)}$$

$\therefore$ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(n)$ เป็นจริงทุก $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่างที่ 1 $\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 19} + \ldots + \frac{1}{(6n-5)(6n+1)} = \frac{n}{6n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 19} + \ldots + \frac{1}{(6n-5)(6n+1)} = \frac{n}{6n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{1\cdot 7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{(6(1)-5)(6(1)+1)} \qquad \therefore\ P(1) \text{ เป็นจริง}$$

(2) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 19} + \ldots + \frac{1}{(6k-5)(6k+1)} = \frac{k}{6k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$$

พิจารณา $P(k+1)$

$$\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(6k-5)(6k+1)} + \frac{1}{(6(k+1)-5)(6(k+1)+1)}$$

$$= \frac{k}{6k+1} + \frac{1}{(6(k+1)-5)(6(k+1)+1)}$$

$$= \frac{k}{6k+1} + \frac{1}{(6k+1)(6k+7)}$$

$$= \frac{k(6k+7)+1}{(6k+1)(6k+7)}$$

$$= \frac{6k^2+7k+1}{(6k+1)(6k+7)}$$

$$= \frac{(6k+1)(k+1)}{(6k+1)(6k+7)}$$

$$= \frac{(k+1)}{6(k+1)+1}$$

$\therefore$ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(n)$ เป็นจริงทุก $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่างที่ 2 $\frac{1}{1\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 15} + \ldots + \frac{1}{(7n-6)(7n+1)} = \frac{n}{7n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\frac{1}{1\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 15} + \ldots + \frac{1}{(7n-6)(7n+1)} = \frac{n}{7n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

(1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$n = 1 \rightarrow \frac{1}{1\cdot 8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{(7(1)-6)(7(1)+1)} \qquad \therefore\ P(1) \text{ เป็นจริง}$$

(2) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ $\frac{1}{1\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(7k-6)(7k+1)}=\frac{k}{7k+1}, \forall k\in\mathbb{N}$

พิจารณา $P(k+1)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(7k-6)(7k+1)}+\frac{1}{(7(k+1)-6)(7(k+1)+1)}\\
&=\frac{k}{7k+1}+\frac{1}{(7(k+1)-6)(7(k+1)+1)}\\
&=\frac{k}{7k+1}+\frac{1}{(7k+1)(7k+8)}\\
&=\frac{k(7k+8)+1}{(7k+1)(7k+8)}\\
&=\frac{7k^2+8k+1}{(7k+1)(7k+8)}\\
&=\frac{(7k+1)(k+1)}{(7k+1)(7k+8)}\\
&=\frac{k+1}{(7(k+1)+1)}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(n)$ เป็นจริงทุก $n\in\mathbb{N}$

ตัวอย่างที่ 3 $\frac{1}{5(6)}+\frac{1}{6(7)}+\ldots+\frac{1}{(5+(n-1))(5+n)}=\frac{n}{5(5+(n))}$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\frac{1}{5(6)}+\frac{1}{6(7)}+\ldots+\frac{1}{(5+(n-1))(5+n)}=\frac{n}{5(5+(n))}, \forall n\in\mathbb{N}$

(1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$n=1\rightarrow\frac{1}{5(6)}=\frac{1}{30}=\frac{1}{5(5+n)}$ $\quad\therefore$ $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ

$\frac{1}{5(6)}+\frac{1}{6(7)}+\ldots+\frac{1}{(5+(k-1))(5+k)}=\frac{k}{5(5+(k))}, \forall k\in\mathbb{N}$

พิจารณา $P(k+1)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5(6)}+\frac{1}{6(7)}+\ldots+\frac{1}{(5+(k-1))(5+k)}+\frac{1}{(5+(k))+(5+(k+1))}\\
&=\frac{k}{5(5+k)}+\frac{1}{(5+(k))(5+(k+1))}\\
&=\frac{k(5+(k+1))+5}{5(5+k)(5+(k+1))}\\
&=\frac{5k+k^2+k+5}{5(5+k)(5+(k+1))}
\end{aligned}$$

$$=\frac{k^2+6k+5}{5(5+k)(5+(k+1))}$$

$$=\frac{(k+5)(k+1)}{5(5+k)(5+(k+1))}$$

$$=\frac{k+1}{5(5+(k+1))}$$

$\therefore\ P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(n)$ เป็นจริงทุก $n\in\mathbb{N}$

ตัวอย่าง 4 $\frac{1}{3(8)}+\frac{1}{8(13)}+\ldots+\frac{1}{(3+(n-1)5)(3+5n)}=\frac{n}{3(3+5(n))}$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\frac{1}{3(8)}+\frac{1}{8(13)}+\ldots+\frac{1}{(3+(n-1)5)(3+5n)}=\frac{n}{3(3+5(n))}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$n=1\rightarrow\frac{1}{3(8)}=\frac{1}{24}=\frac{1}{3(3+5(1))}\qquad\therefore\ P(1)\text{ เป็นจริง}$$

(2) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง แล้วจะแสดง $P(k+1)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{3(8)}+\frac{1}{8(13)}+\ldots+\frac{1}{(3+(k-1)5)(3+5k)}=\frac{k}{3(3+5(k))},\forall k\in\mathbb{N}$$

พิจารณา $P(k+1)$

$$\frac{1}{3(8)}+\frac{1}{8(13)}+\ldots+\frac{1}{(3+(k-1)5)(3+5k)}+\frac{1}{(3+5k)(3+5(k+1))}$$

$$=\frac{k}{3(3+5k)}+\frac{1}{(3+5(k))(3+5(k+1))}$$

$$=\frac{k(3+5(k+1))+3}{3(3+5k)(3+5(k+1))}$$

$$=\frac{3k+5k^2+5k+3}{3(3+5k)(3+5(k+1))}$$

$$=\frac{5k^2+8k+3}{3(3+5k)(3+5(k+1))}$$

$$=\frac{(k+1)(5k+3)}{3(3+5k)(3+5(k+1))}$$

$$=\frac{k+1}{3(3+5(k+1))}$$

$\therefore\ P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(n)$ เป็นจริงทุก $n\in\mathbb{N}$

สรุปผลการวิจัย

การทำวิจัยเรื่อง การศึกษาโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อหาสูตรทั่วไปของโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ สรุปผลการศึกษา อภิปรายผล และให้ข้อเสนอแนะดังนี้

จะได้สูตรการหาผลรวมของจำนวนนับดังต่อไปนี้

$$1.\ \frac{1}{(1)(1+p)}+\frac{1}{(1+p)(1+2p)}+\dots+\frac{1}{(1+(n-1)p)(1+(n)p)}=\frac{n}{1+(n)p}\ ,\forall n\in\square\ ,\exists p\in\square$$

$$2.\ \frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\dots+\frac{1}{(a+(n-1))(a+(n))}=\frac{n}{a(a+(n))}\ ,\forall n\in\square\ ,\exists a\in\square$$

$$3.\ \frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+p)(a+2p)}+\dots+\frac{1}{(a+(n-1)p)(a+np)}=\frac{n}{(a)(a+np)}\ ,\forall n\in\square\ ,\exists p,a\in\square$$

อภิปรายผลการวิจัย

จากผลการศึกษาโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งได้สูตรทั่วไปจากการศึกษาทั้งหมด 3 สูตร คือ สูตรการหาผลรวมของจำนวนนับมีทั้งหมด3สูตร โดยใช้การหาพจน์ทั่วของลำดับเลขคณิตเพื่อหาพจน์ที่ n และใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ในการคำนวณหาสูตรทั่วไป แล้วใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ ซึ่งเป็นจริงทั้งหมด ดังนั้นเราสามารถจะใช้สูตรทั้ง 3 สูตรนี้ ในการหาผลรวมของจำนวนนับ

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

1. ในการหาผลรวมของจำนวนนับจะต้องจำสูตรในการใช้ให้ถูกต้อง
2. ถ้าใช้สูตรการหาผลรวมของจำนวนนับ ซึ่งจะทำให้คิดได้ง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้น

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

ศึกษาโจทย์ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการหาผลรวมของจำนวนนับที่มีตัวส่วนเป็นจำนวนเต็มลบ เพื่อหาสูตรทั่วไป

เอกสารอ้างอิง

ณรงค์ ปั้นนิ่ม และนิติยา ปภาพจน์. (2548). **ทฤษฎีจำนวน**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: ด่านสุทธาการพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2543). **รวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และสารพันปัญหาคณิตศาสตร์**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2556). **โลกทฤษฎีจำนวน**. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พัฒนี อุดมกะวานิช. (2545). **ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔-๖**. พิมพ์ครั้งที่ 11. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.

อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.