รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

การปรับปรุงความแม่นยำของแบบจำลอง GMC(1,N) และการประยุกต์ใช้
The Accuracy Adaptation of GMC(1,N) Model and Its Application

วันวิสา พวงมาลัย[1] และ จิรพงศ์ พวงมาลัย[2]
Wanwisa Puangmalai[1] and Jirapong Puangmalai[1]

[1] อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
[2] อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการปรับปรุงแบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ เพื่อให้แบบจำลองมีความแม่นยำในการทำนายมากยิ่งขึ้น โดยการปรับปรุงการหาค่าพื้นหลัง (Background value) และสมการการทำนาย และประยุกต์ใช้แบบจำลอง $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ แบบเดิม และแบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ ที่ปรับปรุงใหม่กับการทำนายปริมาณการใช้ไฟฟ้าในประเทศไทย โดยความแม่นยำจากการทำนายของแบบจำลอง $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ แบบปรับปรุงใหม่ มีความแม่นยำมากกว่าแบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ แบบเดิม

คำสำคัญ: แบบจำลองเกรย์ / ค่าพื้นหลัง / สมการเชิงอนุพันธ์เกรย์

Abstract

In this article, we propose a modified $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ model to improve prediction accuracy of $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ by a modification in the calculating formula of background value and the model prediction equation. In addition, the modified $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ and traditional $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ models are applied to forecast the Electricity consumption in Thailand. In comparison, the results show that the predictions employing modified $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ model are more accurate than that of the traditional $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ model.

Keywords: Grey model / Background value / Grey differential equation

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

แบบจำลองเกรย์มีหลายชนิดโดยเริ่มต้นจากการใช้ทฤษฎีระบบเกรย์ในการสร้างแบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GM}(1,1)$ (Cui, et al., 2013, pp.4399-4406) (Evans, 2014, pp.1236-1244) (Xie, et al., 2009, pp.1173-1186) (Ziliang, 2004, pp.390-397) เป็นแบบจำลองพื้นฐานที่รับได้ความนิยมอย่างแพร่หลาย แต่เนื่องจาก $\mathrm{GM}(1,1)$ ไม่สามารถใช้ได้กับระบบที่เกิดขึ้นจริงหลายด้าน โดยข้อมูลส่วนใหญ่จะเป็นข้อมูลที่เกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับปัจจัยด้านอื่น ๆ ด้วย ดังนั้นจึงมีการพัฒนาแบบจำลองเกรย์หลายรูปแบบ เช่น $\mathrm{GM}(1,\mathrm{N})$ (Box, et al., 1976) $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$(Tien, 2011, pp.1884-1897) (Quah, et al., 1999, pp.295–301) $\mathrm{D\text{-}GMC}(1,\mathrm{N})$ $\mathrm{D\text{-}GMC}(1,\mathrm{N})$ (He, et al., 2013, pp.124-138) เป็นต้น เนื่องจากการใช้แบบจำลองเกรย์ดังกล่าวนั้นมีค่าผิดพลาดจากการทำนายอยู่ ซึ่งอาจเกิดจากความไม่สอดคล้องกันระหว่างการประมาณค่าพารามิเตอร์และสมการการทำนาย โดยความไม่สอดคล้องกันของเงื่อนไขเรียบเสมือน ค่าพื้นหลัง เป็นต้น ดังนั้น เพื่อให้ได้การทำนายที่แม่นยำมากยิ่งขึ้น บทความนี้จึงได้นำเสนอวิธีการปรับปรุงแบบจำลอง $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ เพื่อให้ความแม่นยำของการทำนายมากขึ้น

บทความวิจัยนี้จะแบ่งออกเป็น 4 ส่วน ดังนี้ ส่วนที่ 1 คือ บทนำโดยจะอธิบายถึงที่มาและความสำคัญของบทความวิจัย ส่วนที่ 2 คือ ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย ส่วนที่ 3 กล่าวถึงขั้นตอนวิธีการปรับปรุงความถูกต้องของแบบจำลอง $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ และการนำไปประยุกต์ใช้ และส่วนที่ 4 เป็นบทสรุปผลลัพธ์ที่ได้จากบทความวิจัยนี้

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้แบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ มีความแม่นยำในการทำนายมากยิ่งขึ้น
2. เพื่อปรับปรุงการหาค่าพื้นหลัง (Background value) และสมการการทำนายให้มีความแม่นยำในการทำนายมากยิ่งขึ้น

ความรู้พื้นฐาน

บทความวิจัยนี้จำเป็นต้องใช้ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ดังนี้

นิยาม 1 ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์มิติ $m\times n$ แล้วทรานสโพสของ A จะเป็นเมทริกซ์มิติ $n\times m$ เขียนแทนด้วย A^T โดยที่ $A^T=\left[c_{ij}\right]$ เมื่อ $c_{ij}=a_{ji}$ และ $1\le i\le n, 1\le j\le m$

นิยาม 2 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n\times n$ ถ้า B เป็น เมทริกซ์มิติ $n\times n$ และมีสมบัติว่า

$$AB=BA=I_n$$

เมื่อ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ แล้วเราเรียก B ว่าเป็นเมทริกซ์ผกผันของ A และเขียนแทน B ด้วย A^{-1}

นิยาม 3 (Bin, et al., 2002, pp.138-141) สมมติให้ $X^{(0)}(k)=\left\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),...,x^{(0)}(k),...,x^{(0)}(n)\right\}$ เป็นลำดับของข้อมูลที่ไม่เป็นลบ ถ้า $\forall\varepsilon>0$ จะมี k_0 เมื่อ $k>k_0$ ที่ซึ่ง

$$\frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}=\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}<\varepsilon$$

แล้ว $X^{(0)}(k)=\left\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),...,x^{(0)}(k),...,x^{(0)}(n)\right\}$ เป็นลำดับเรียบ (Smooth sequence)

นิยาม 4 (Bin, et al., 2002, pp.138-141) สมมติให้ $X^{(0)}(k)=\left\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),...,x^{(0)}(k),...,x^{(0)}(n)\right\}$ เป็นลำดับของข้อมูลที่ไม่เป็นลบ ถ้า $\frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}=\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$ เป็นลำดับเพิ่มที่ขึ้นกับค่า k แล้ว $X^{(0)}(k)=\left\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),...,x^{(0)}(k),...,x^{(0)}(n)\right\}$ เป็นลำดับเรียบ

นิยาม 5 (Bund, 2013, pp.1256-1266) ถ้า $X=(x(1),x(2),x(3),...,x(n))$ เป็นลำดับที่มีพจน์ไม่เป็นลบ จะเรียก

$$\rho(k)=\frac{x(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x(i)}\ ,\ k=2,3,4,...,n$$

ว่า อัตราส่วนเรียบ (Smooth ratio) ของลำดับ X

นิยาม 6 (Bund, 2013, pp. 1256-1266) ถ้า $X=(x(1),x(2),x(3),...,x(n))$ เป็นลำดับที่มีพจน์ไม่เป็นลบ ที่ซึ่ง

$$\frac{\rho(k+1)}{\rho(k)}<1\ ,\ k=2,3,...,n-1$$

และ $$\rho(k)\in[0,0.5]\ ,\ k=3,4,...,n$$

แล้วจะเรียกลำดับ X ว่าลำดับเรียบเสมือน (Quasi smooth sequence)

ต่อไปจะแนะนำแบบจำลองเกรย์ในรูปแบบต่าง ๆ เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการเขียนบทความวิจัยนี้

แบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GM}(1,1)$ (Cui, et al., 2013, pp.4399-4406)

สมมติว่ามีลำดับข้อมูล $X^{(0)} = \left(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), ..., x^{(0)}(k), ..., x^{(0)}(n)\right)$

โดยที่ $x^{(0)}(k) \geq 0$, $k = 1,2,3,...,n$ ซึ่งเป็นระบบของข้อมูลที่ต้องการสร้างแบบจำลอง

กำหนด $X^{(1)} = \left(x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), ..., x^{(1)}(k), ..., x^{(1)}(n)\right)$

เมื่อ $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)$, $k = 1,2,...,n$

$X^{(1)}$ สามารถจำลองด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับข้อมูล $X^{(1)}$ ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}x^{(1)}(t) + b_1 x^{(1)}(t) = u \qquad (1)$$

เมื่อ b_1 และ u เป็นพารามิเตอร์ และเรียกสมการ (1) ว่า Whitenization differential equation

อินทิเกรตสมการ (1) ทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\int_{k-1}^{k} \frac{d}{dt}x^{(1)}(t)dt + \int_{k-1}^{k} b_1 x^{(1)}(t)dt = \int_{k-1}^{k} u dt$$

จะได้ $x^{(0)}(k) + b_1 z^{(1)}(k) = u \qquad (2)$

โดยที่ $\int_{k-1}^{k} \frac{d}{dt}x^{(1)}(t)dt = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = x^{(0)}(k)$

และ $z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^{k} x_1^{(1)}(t)dt$ เรียกว่า ค่าพื้นหลัง (Background value) และเรียกสมการ (2) ว่า Grey differential equation โดยการประมาณอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule)

จะได้ว่า $z^{(1)}(k) \approx 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$

ดังนั้นลำดับของค่าพื้นหลัง $Z^{(1)}$ ของ $X^{(1)}$ กำหนดโดย

$$Z^{(1)} = \left(z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), ..., z^{(1)}(k), ..., z^{(1)}(n)\right)$$

จาก (2.2) สามารถนำไปหาพารามิเตอร์ b_1 และ u จะได้ว่า

$$\left[b_1 \ u\right]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \qquad (3)$$

และสามารถแก้สมการ (1) โดยวิธีการหาตัวประกอบอินทิเกรต (Integrating factor) ทำให้ได้สมการการทำนายคือ

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = x^{(1)}(1)e^{-b_1(k)} + \frac{u}{b_1}(1 - e^{-b_1(k)}) \qquad (4)$$

เมื่อ $\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$, $\hat{x}^{(1)}(1) = \hat{x}^{(0)}(1)$, $k = 1,2,3,...,n$

แบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$(Box, et al.,1976)

ให้ $X_1^{(0)}$ เป็นตัวแปรตาม และ $X_2^{(0)}, X_3^{(0)}, ..., X_N^{(0)}$ เป็นตัวแปรต้น โดยที่ทุกตัวแปรแปรผันตามเวลา

$$X_1^{(0)} = \left(x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), ..., x_1^{(0)}(k), ..., x_1^{(0)}(n)\right)$$

$$X_2^{(0)} = \left(x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), ..., x_2^{(0)}(k), ..., x_2^{(0)}(n)\right)$$

$$\vdots$$

$$X_N^{(0)} = \left(x_N^{(0)}(1), x_N^{(0)}(2), ..., x_N^{(0)}(k), ..., x_N^{(0)}(n)\right)$$

และสร้างลำดับ

$$X_1^{(1)}=\left(x_1^{(1)}(1),x_1^{(1)}(2),\dots,x_1^{(1)}(k),\dots,x_1^{(1)}(n)\right)$$
$$X_2^{(1)}=\left(x_2^{(1)}(1),x_2^{(1)}(2),\dots,x_2^{(1)}(k),\dots,x_2^{(1)}(n)\right)$$
$$\vdots$$
$$X_N^{(1)}=\left(x_N^{(1)}(1),x_N^{(1)}(2),\dots,x_N^{(1)}(k),\dots,x_N^{(1)}(n)\right)\ ,\ k=1,2,\dots,n$$

เมื่อ $x_j^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{t}x_j^{(0)}(i)\ ,\ i=1,2,3,\dots,k\ ,\ j=2,3,\dots,N$

$X^{(1)}$ สามารถจำลองด้วย Whitenization differential equation ต่อไปนี้

$$\frac{d}{dt}x_1^{(1)}(t)+b_1x_1^{(1)}(t)=\sum_{j=2}^{N}b_jx_j^{(1)}(t) \tag{5}$$

เมื่อ $b_1,b_2,b_3,\dots,b_N$ เป็นพารามิเตอร์ สมมติให้ $\sum_{j=2}^{N}b_jx_j^{(1)}(t)$ เป็นค่าคงที่ จาก (5) จะได้ว่า

$$\int_{k-1}^{k}\frac{d}{dt}x_1^{(1)}(t)dt+\int_{k-1}^{k}b_1x_1^{(1)}(t)dt=\int_{k-1}^{k}\sum_{j=2}^{N}b_jx_j^{(1)}(t)\,dt$$

ดังนั้น Grey differential equation เขียนอยู่ในรูป

$$x_1^{(1)}(k)+b_1z_1^{(1)}(k)=\sum_{j=2}^{N}b_jx_j^{(1)}(k) \tag{6}$$

เมื่อ $z_1^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x_1^{(1)}(t)dt$ เป็นค่าพื้นหลัง โดยการประมาณค่าอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

จะได้ว่า $z^{(1)}(k)\approx 0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)$

ดังนั้นลำดับของค่าพื้นหลัง $Z^{(1)}$ ของ $X^{(1)}$ กำหนดโดย

$$Z_1^{(1)}=\left(z_1^{(1)}(2),z_1^{(1)}(3),\dots,z_1^{(1)}(k),\dots,z_1^{(1)}(n)\right)$$

จาก (6) สามารถหาพารามิเตอร์ $b_1,b_2,b_3,\dots,b_N$ จะได้ว่า

$$\left[b_1\ b_2\ b_3\dots b_N\right]^T=(B^TB)^{-1}B^TY \tag{7}$$

สามารถแก้ (5) โดยวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์ ทำให้ได้สมการการทำนายคือ

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=x_1^{(1)}(1)e^{-b_1(k)}+\frac{\sum_{j=2}^{N}b_jx_j^{1}(k+1)}{b_1}(1-e^{-b_1(k)}) \tag{8}$$

เมื่อ $\hat{x}_1^{(0)}(k+1)=\hat{x}_1^{(1)}(k+1)-\hat{x}_1^{(1)}(k),\ \ x_1^{(1)}(1)=x_1^{(0)}(1)\ ,k=1,2,3,\dots,n$

ในปี ค.ศ. 2005 Wu และ Chen (Wu, et al., 2005, pp.198-217) ได้นำเสนอบทความเกี่ยวกับการพัฒนาแบบจำลองเกรย์แบบหลายตัวแปรขึ้นโดยการเพิ่มตัวแปรควบคุมเสริม (Grey control parameter) u ในแบบจำลอง $\mathrm{GM}(1,\mathrm{N})$ ใช้ชื่อย่อคือ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ โดยมีกระบวนการสร้างดังนี้

Whitenization differential equation กำหนดโดย

$$\frac{d}{dt}x_1^{(1)}(t)+b_1x_1^{(1)}(t)=\sum_{j=2}^{N}b_jx_j^{(1)}(t)+u \tag{9}$$

เมื่อ $b_1,b_2,b_3,\dots,b_N,u$ เป็นพารามิเตอร์ อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (9) จะได้ว่า

$$x_1^{(0)}(k)+b_1z_1^{(1)}(k)=\sum_{j=2}^{N}b_jz_j^{(1)}(k)+u \tag{10}$$

เมื่อ $z_i^{(1)}(k) = \int_{k-1}^{k} x_i^{(1)}(t)dt, i = 1,2,...,N$ เป็นค่าพื้นหลัง โดยการประมาณค่าอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู จะได้ว่า $z_i^{(1)}(k) \approx 0.5x_i^{(1)}(k) + 0.5x_i^{(1)}(k-1)$

ดังนั้นลำดับของค่าพื้นหลัง $Z_i^{(1)}$ ของ $X_i^{(1)}$ กำหนดโดย

$$Z_i^{(1)} = \left(z_i^{(1)}(2), z_i^{(1)}(3), ..., z_i^{(1)}(k), ..., z_i^{(1)}(n)\right)$$

จากสมการ (10) สามารถหาพารามิเตอร์ $b_1, b_2, b_3, ..., b_N, u$ ดังนี้

$$[b_1\ b_2\ b_3 ... b_N]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \tag{11}$$

สามารถแก้สมการ (9) โดยวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์ ทำให้ได้สมการการทำนาย ดังนี้

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = x_1^{(1)}(1)e^{-b_1(k)} + \frac{1}{2}e^{-b_1(k)}f(1) + \sum_{\tau=2}^{k}[e^{-b_1(k+1-\tau)}f(\tau)] + \frac{1}{2}f(k) \tag{12}$$

โดยที่ $f(k) = b_2 x_2^{(1)}(k) + b_3 x_3^{(1)}(k) + ... + b_N x_N^{(1)}(k) + u,\ x_1^{(1)}(1) = x_1^{(0)}(1),\ k = 2,3,...,n$

ต่อมาในปี 2011 โดย Tien (Tien, 2011, pp.1884-1897) ได้นำเสนอบทความเกี่ยวกับการพัฒนาสมการการทำนายให้มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น โดยใช้ Unit impluse function ($\delta(t)$) ในสมการเชิงอนุพันธ์ และอินทิเกรตโดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ (Laplace transform method) ดังนี้

กำหนดสมการ Whitenization differential equation

$$\frac{d}{dt}x_1^{(1)}(t) + b_1 x_1^{(1)}(t) = \sum_{j=2}^{N} b_j x_j^{(1)}(t) + u \tag{13}$$

เมื่อ $b_1, b_2, b_3, ..., b_N, u$ เป็นพารามิเตอร์ อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (13) จะได้ว่า

$$x_1^{(0)}(k) + b_1 z_1^{(1)}(k) = \sum_{j=2}^{N} b_j z_j^{(1)}(k) + u \tag{14}$$

เมื่อ $z_i^{(1)}(k) = \int_{k-1}^{k} x_i^{(1)}(t)dt$ เป็นค่าพื้นหลัง โดยการประมาณค่าอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

จะได้ว่า $z_i^{(1)}(k) \approx 0.5x_i^{(1)}(k) + 0.5x_i^{(1)}(k-1)$

ดังนั้นลำดับของค่าพื้นหลัง $Z_i^{(1)}$ ของ $X_i^{(1)}$ กำหนดโดย

$$Z_i^{(1)} = \left(z_i^{(1)}(2), z_i^{(1)}(3), ..., z_i^{(1)}(k), ..., z_i^{(1)}(n)\right)$$

จากสมการ (14) สามารถหาพารามิเตอร์ $b_1, b_2, b_3, ..., b_N, u$ ดังนี้

$$[b_1\ b_2\ b_3 ... b_N\ u]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \tag{15}$$

จากนั้นแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดโดย

$$\frac{d}{dt}x_1^{(1)}(t) + b_1 x_1^{(1)}(t) = \delta(t) \tag{16}$$

โดยที่ $\delta(t)$ คือ Unit impulse function และใช้วิธีการแปลงลาปลาซในสมการ (16) ทำให้ได้สมการการทำนาย ดังนี้

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = x_1^{(0)}(1)e^{-b_1 k} + u(k-1)\sum_{i=2}^{k+1}\left[e^{-b_1(k+\frac{3}{2}-i)}\frac{1}{2}(f(i)+f(i-1))\right] \tag{17}$$

เมื่อ $u(k-1)$ คือ ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Unit step function) และ

$$f(t) = b_2 x_2^{(1)}(t) + b_3 x_3^{(1)}(t) + ... + b_N x_N^{(1)}(t) + u$$

เนื่องจากความไม่สอดคล้องกันของการหาพารามิเตอร์และสมการการทำนาย ในปี 2013 He และคณะ (He, et al., 2013, pp.124-138) ได้นำเสนอบทความเกี่ยวกับการปรับปรุงสมการการทำนาย GMC(1,N) และเงื่อนไขที่ทำ

ให้สมการการทำนายระหว่าง C-GMC(1,N) แบบต่อเนื่อง (The continuous multivariate grey model) และ D-GMC(1,N) แบบวิยุต (The discrete multivariate grey model) สอดคล้องกัน ดังนี้

1. แบบจำลองเกรย์ C-GMC(1,N) (The continuous multivariate grey model)

กำหนดสมการ Whitenization differential equation

$$\frac{d}{dt}x_1^{(1)}(t)+b_1x_1^{(1)}(t)=\sum_{j=2}^{N}b_jx_j^{(1)}(t)+u \tag{18}$$

เมื่อ $b_1,b_2,b_3,...,b_N,u$ เป็นพารามิเตอร์

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (18) ได้ว่า

$$x_1^{(0)}(k)+b_1z_1^{(1)}(k)=\sum_{j=2}^{N}b_jz_j^{(1)}(k)+u \tag{19}$$

เมื่อ $z_i^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x_i^{(1)}(t)dt$ เป็นค่าพื้นหลัง โดยการประมาณค่าอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

จะได้ว่า $z_i^{(1)}(k)\approx 0.5x_i^{(1)}(k)+0.5x_i^{(1)}(k-1)$

ดังนั้นลำดับของค่าพื้นหลัง $Z_i^{(1)}$ ของ $X_i^{(1)}$ กำหนดโดย

$$Z_i^{(1)}=\left(z_i^{(1)}(2),z_i^{(1)}(3),...,z_i^{(1)}(k),...,z_i^{(1)}(n)\right)$$

จากสมการ (19) สามารถหาพารามิเตอร์ $b_1,b_2,b_3,...,b_N,u$ ดังนี้

$$[b_1\ b_2\ b_3\ldots b_N\ u]^T=(B^TB)^{-1}B^TY \tag{20}$$

สามารถแก้สมการ (18) โดยวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์ ทำให้ได้สมการการทำนาย ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{x}_1^{(1)}(k+1)&=x_1^{(1)}(1)e^{-b_1(k)}+\frac{u}{b_1}(1-e^{-b_1(k)})\\&+\sum_{j=2}^{N}b_j\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(1-e^{-b_1})e^{-b_1(k+1)}}{2b_1}(x_j^{(1)}(k-m+1)+x_j^{(1)}(k-m))\end{aligned} \tag{21}$$

เมื่อ $\hat{x}_1^{(0)}(k+1)=\hat{x}_1^{(1)}(k+1)-\hat{x}_1^{(1)}(k),\ \ x_1^{(1)}(1)=x_1^{(0)}(1)\ ,k=1,2,3,...,n$

2. แบบจำลองเกรย์ D-GMC(1,N) (The discrete multivariate grey model)

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (18) ได้ว่า

$$x_1^{(1)}(k)-\frac{(1-0.5b_1)}{(1+0.5b_1)}x_1^{(1)}(k-1)=\sum_{j=2}^{N}\frac{b_j}{2(1+0.5b_1)}(x_j^{(1)}(k)+x_j^{(1)}(k-1))+\frac{u}{(1+0.5b_1)} \tag{22}$$

จากสมการ (22) สามารถหาพารามิเตอร์ $b_1,b_2,b_3,...,b_N,u$ ดังนี้

$$[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ldots\beta_N\ \eta]^T=(B^TB)^{-1}B^TY \tag{23}$$

เมื่อ $\beta_1=-\frac{(1-0.5b_1)}{(1+0.5b_1)}\ ,\ \eta=\frac{u}{(1+0.5b_1)}\ ,\ \beta_j=\frac{b_j}{(1+0.5b_1)}\ ,\ j=2,3,...,N$

สามารถแก้สมการ (18) โดยวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์ ทำให้ได้สมการการทำนาย ดังนี้

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=-\beta_1x_1^{(1)}(k)+\sum_{j=2}^{N}\frac{\beta_j}{2}(x_j^{(1)}(k+1)+x_j^{(1)}(k))+\eta \tag{24}$$

เมื่อ $\hat{x}_1^{(0)}(k+1)=\hat{x}_1^{(1)}(k+1)-\hat{x}_1^{(1)}(k)\ ,\ k=1,2,3,...,n$

เนื่องจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ (18) ใช้เทคนิคการแก้สมการที่ต่างกัน ทำให้ค่าในการพยากรณ์ที่ได้ไม่สอดคล้องกัน ดังนั้นสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง C-GMC(1,N) และ D-GMC(1,N) ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 (He, et al., 2013, pp.124-138) ถ้าค่าพารามิเตอร์ b_1 ในสมการที่ (18) มีค่าน้อย แล้วแบบจำลอง $\text{C-GMC}(1,\text{N})$ สอดคล้องกับแบบจำลอง $\text{D-GMC}(1,\text{N})$

วิธีการปรับปรุงแบบจำลอง $\text{GMC}(1,\text{N})$

สำหรับข้อมูลที่นำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองเกรย์นั้น ควรสอดคล้องกับเงื่อนไขความเรียบ ซึ่งมีผลต่อความถูกต้องของการทำนาย ทำให้การทำนายโดยใช้แบบจำลองเกรย์มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ดังนั้นในขั้นต้นจึงควรมีการตรวจสอบเงื่อนไขความเรียบของข้อมูลก่อน หากข้อมูลที่นำมาใช้ในการทำนายไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว สามารถแปลงข้อมูลให้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2 กำหนด $X^{(0)}(k)=\left\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\ldots,x^{(0)}(k),\ldots,x^{(0)}(n)\right\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ไม่เป็นลบ

ถ้า $z^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)+c$ ที่ซึ่ง $k=4,5,\ldots,n$ โดยที่ $c>\max\left\{\dfrac{2x^{(0)}(k)-x_1^{(0)}(k-1)}{k-3}\right\}$

แล้ว $Z^{(0)}(k)=\left\{z^{(0)}(1),z^{(0)}(2),\ldots,z^{(0)}(k),\ldots,z^{(0)}(n)\right\}$ เป็นลำดับเรียบเสมือน

พิสูจน์ พิจารณา $c>\max\left\{\dfrac{2x^{(0)}(k)-x_1^{(1)}(k-1)}{k-3}\right\}$

เลือก $c>m$

กำหนด $m=\max\left\{\dfrac{2x^{(0)}(k)-x_1^{(1)}(k-1)}{k-3}\right\}$

นั่นคือ $c>\dfrac{2x^{(0)}(k)-x_1^{(1)}(k-1)}{k-3}$

$$2x^{(0)}(k)+2c<x_1^{(1)}(k-1)+(k-1)c$$

$$\frac{x^{(0)}(k)+c}{x_1^{(1)}(k-1)+(k-1)c}<\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^{(0)}(k)+c}{(x^{(0)}(1)+c)+(x^{(0)}(2)+c)+\ldots+(x^{(0)}(k-1)+c)}<\frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $\dfrac{z^{(0)}(k)}{z^{(1)}(k-1)}<\dfrac{1}{2}$

ดังนั้น $Z^{(0)}(k)=\left\{z^{(0)}(1),z^{(0)}(2),\ldots,z^{(0)}(k),\ldots,z^{(0)}(n)\right\}$ เป็นลำดับเรียบเสมือน □

1. วิธีการปรับปรุงแบบจำลอง $\text{GMC}(1,\text{N})$

ให้ $X_1^{(0)}$ เป็นตัวแปรตาม และ $X_2^{(0)},X_3^{(0)},\ldots,X_N^{(0)}$ เป็นตัวแปรต้น โดยที่ทุกตัวแปรแปรผันตามเวลา กำหนดโดย

$$X_1^{(0)}=\left(x_1^{(0)}(1),x_1^{(0)}(2),\ldots,x_1^{(0)}(k),\ldots,x_1^{(0)}(n)\right)$$
$$X_2^{(0)}=\left(x_2^{(0)}(1),x_2^{(0)}(2),\ldots,x_2^{(0)}(k),\ldots,x_2^{(0)}(n)\right)$$
$$\vdots$$
$$X_N^{(0)}=\left(x_N^{(0)}(1),x_N^{(0)}(2),\ldots,x_N^{(0)}(k),\ldots,x_N^{(0)}(n)\right)$$

และสร้างลำดับ

$$X_1^{(1)} = \left(x_1^{(1)}(1), x_1^{(1)}(2), \ldots, x_1^{(1)}(k), \ldots, x_1^{(1)}(n)\right)$$
$$X_2^{(1)} = \left(x_2^{(1)}(1), x_2^{(1)}(2), \ldots, x_2^{(1)}(k), \ldots, x_2^{(1)}(n)\right)$$
$$\vdots$$
$$X_N^{(1)} = \left(x_N^{(1)}(1), x_N^{(1)}(2), \ldots, x_N^{(1)}(k), \ldots, x_N^{(1)}(n)\right),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ $$x_j^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{t} x_j^{(0)}(i),\ i = 1, 2, 3, \ldots, k,\ j = 2, 3, \ldots, N$$

$X^{(1)}$ สามารถจำลองด้วย Whitenization differential equation ต่อไปนี้

$$\frac{d}{dt} x_1^{(1)}(t) + b_1 x_1^{(1)}(t) = \sum_{j=2}^{N} b_j x_j^{(1)}(t)$$

เมื่อข้อมูลสอดคล้องกับเงื่อนไขความเรียบ เราสามารถให้ $x_i^{(1)}(t)$ ประมาณด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $x_i^{(1)}(t) \approx E_i e^{a_i t} + F_i$ โดยใช้ค่าพื้นหลัง

$$z_i^{(1)}(k) = \int_{k-1}^{k} x_i^{(1)}(t)dt \approx \int_{k-1}^{k} (E_i e^{a_i t} + F_i)dt \tag{25}$$

ซึ่งสามารถหาค่าพารามิเตอร์ E_i, a_i และ F_i โดยเริ่มจากการหาค่า a_i

พิจารณา

$$\begin{aligned} x_i^{(0)}(k) &= x_i^{(1)}(k) - x_i^{(1)}(k-1) = E_i e^{a_i(k-1)}(e^{a_i} - 1) \\ x_i^{(0)}(k-1) &= x_i^{(1)}(k-1) - x_i^{(1)}(k-2) = E_i e^{a_i(k-2)}(e^{a_i} - 1) \end{aligned} \tag{26}$$

จาก (26) ได้ว่า

$$x_i^{(0)}(k) = e^{a_i} x_i^{(0)}(k-1) \tag{27}$$

จาก (27) หาค่า a_i โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Least-square Method) ฟังก์ชันจุดประสงค์ (Objective function) กำหนดโดย

$$E(e^{a_i}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i^{(0)}(k) - e^{a_i} x_i^{(0)}(k-1))^2 \tag{28}$$

หาจุดวิกฤติ (Critical point) ของ (28) เพื่อประมาณค่า a_i จาก

$$E_{a_i} = \frac{\partial E}{\partial a_i} = \sum_{k=1}^{n} (x_i^{(0)}(k) - e^{a_i} x_i^{(0)}(k-1)) x_i^{(0)}(k-1) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_i^{(0)}(k) x_i^{(0)}(k-1) - e^{a_i}(x_i^{(0)}(k-1))^2) = 0$$

$$e^{a_i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_i^{(0)}(k) x_i^{(0)}(k-1)}{\sum_{k=1}^{n} (x_i^{(0)}(k-1))^2}$$

$$\therefore \quad a_i = \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_i^{(0)}(k) x_i^{(0)}(k-1)}{\sum_{k=1}^{n} (x_i^{(0)}(k-1))^2}\right) \tag{29}$$

หาค่า E_i, F_i โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดเช่นกัน ฟังก์ชันจุดประสงค์กำหนดโดย

$$Q(E_i, F_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i^{(1)}(k) - E_i e^{a_i k} - F_i)^2 \tag{30}$$

ประมาณค่า E_i , F_i จาก

$$\frac{\partial Q}{\partial E_i} = -\sum_{k=1}^{n}\left(x_i^{(1)}(k) - E_i e^{a_i k} - F_i\right)e^{a_i k} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial F_i} = -\sum_{k=1}^{n}\left(x_i^{(1)}(k) - E_i e^{a_i k} - F_i\right) = 0$$

จาก $\frac{\partial Q}{\partial E_i} = \frac{\partial Q}{\partial F_i} = 0$ จะได้ว่า

$$E_i = \frac{n\sum_{k=1}^{n} e^{a_i k} x_i^{(1)}(k) - \sum_{k=1}^{n} e^{a_i k}\sum_{k=1}^{n} x_i^{(1)}(k)}{n\sum_{k=1}^{n}\left(e^{a_i k}\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} e^{a_i k}\right)^2},$$

$$F_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_i^{(1)}(k)}{n} - E_i\frac{\sum_{k=1}^{n} e^{a_i k}}{n} \tag{31}$$

ดังนั้น สามารถหาค่า a_i , E_i และ F_i จาก (29) และ (31)

เมื่อข้อมูลสอดคล้องกับเงื่อนไขความเรียบ สามารถแก้สมการ (18) โดยวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์ ดังนี้

$$e^{b_1 t} x_1^{(1)}(t)\Big|_1^k = \int_1^k \sum_{j=2}^{N} e^{b_1 t} b_1 x_j^{(1)}(t)dt + \int_1^k e^{b_1 t} u dt$$

$$x_1^{(1)}(k)e^{b_1 k} - x_1^{(1)}(1)e^{b_1} = \int_1^k \sum_{j=2}^{N} e^{b_1 t} b_j\left[E_j e^{a_j t} + F_j\right]dt + \int_1^k e^{b_1 t} u dt$$

จัดรูปสมการดังกล่าว จะได้ว่า

$$x_1^{(1)}(k) = x_1^{(1)}(1)e^{-b_1(k-1)} + \sum_{j=2}^{N} b_j\left[\frac{E_j e^{a_j k}}{b_1 + a_j} + \frac{F_j}{b_1}\right] - \sum_{j=2}^{N} b_j\left[\frac{E_j e^{-b_1(k-1)+a_j}}{b_1 + a_j} + \frac{F_j e^{-b_1(k-1)}}{b_1}\right] + \frac{u}{b_1} - \frac{u e^{-b_1(k-1)}}{b_1} \tag{32}$$

จาก (32) แทนค่า k ด้วย $k+1$ ได้ว่า

$$x_1^{(1)}(k+1) = x_1^{(1)}(1)e^{-b_1 k} + \sum_{j=2}^{N} b_j\left[\frac{E_j e^{a_j(k+1)}}{b_1 + a_j} + \frac{F_j}{b_1}\right] - \sum_{j=2}^{N} b_j\left[\frac{E_j e^{a_j - b_1 k}}{b_1 + a_j} + \frac{F_j e^{-b_1 k}}{b_1}\right] + \frac{u}{b_1} - \frac{u e^{-b_1 k}}{b_1} \tag{33}$$

นำ e^{-b_1} คูณ (32) และจัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$e^{-b_1} x_1^{(1)}(k) = x_1^{(1)}(1)e^{-b_1 k} + \sum_{j=2}^{N} b_j\left[\frac{E_j e^{a_j k - b_1}}{b_1 + a_j} + \frac{F_j e^{-b_1}}{b_1}\right] - \sum_{j=2}^{N} b_j\left[\frac{E_j e^{a_j - b_1 k}}{b_1 + a_j} + \frac{F_j e^{-b_1 k}}{b_1}\right] + \frac{u e^{-b_1}}{b_1} - \frac{u e^{-b_1 k}}{b_1}$$

(34)

นำสมการ (33) – (34) และจัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$x_1^{(1)}(k+1) - e^{-b_1} x_1^{(1)}(k) = \sum_{j=2}^{N} b_j\left[\frac{E_j e^{a_j(k+1)} + F_j}{b_1 + a_j} - \frac{F_j}{b_1 + a_j} + \frac{F_j}{b_1}\right] - \sum_{j=2}^{N} b_j\left[\frac{E_j e^{a_j k - b_1} + F_j}{b_1 + a_j} - \frac{F_j}{b_1 + a_j} + \frac{F_j e^{-b_1}}{b_1}\right]$$
$$+ \frac{u}{b_1} - \frac{u e^{-b_1}}{b_1}$$

เนื่องจาก $x_j^{(1)}(k) = E_j e^{a_j k} + F_j^*$ และ $x_j^{(1)}(k+1) = E_j e^{a_j(k+1)} + F_j^*$ เมื่อ $F_j^* = F_j e^{b_1}$ จัดรูปสมการใหม่ ได้ว่า

$$x_1^{(1)}(k+1) - e^{-b_1} x_1^{(1)}(k) = \sum_{j=2}^{N} b_j^*\left[x_j^{(1)}(k+1) - x_j^{(1)}(k)e^{-b_1}\right] + u^* \tag{35}$$

โดยที่ $b_j^* = \dfrac{b_j}{b_1 + a_j}$, $u^* = \sum_{j=2}^{N} b_j \left[\dfrac{F_j}{b_1} - \dfrac{F_j e^{-b_1}}{b_1} \right] + \dfrac{u}{b_1} - \dfrac{u e^{-b_1}}{b_1}$

จากสมการ (35) ประมาณค่า $e^{-b_1} \approx e^{-a_1}$ และหาพารามิเตอร์ $b_2^*, b_3^*, ..., b_N^*, u^*$ ดังนี้

พิจารณา

$$\left[b_2^* \; b_3^* \ldots b_N^* \; u^* \right]^T = \left(A^T A \right)^{-1} A^T X \tag{36}$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} x_2^{(1)}(2) - x_2^{(1)}(1) & x_3^{(1)}(2) - x_3^{(1)}(1) & \cdots & x_N^{(1)}(2) - x_N^{(1)}(1) & 1 \\ x_2^{(1)}(3) - x_2^{(1)}(2) & x_3^{(1)}(3) - x_3^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(3) - x_N^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2^{(1)}(n) - x_2^{(1)}(n-1) & x_3^{(1)}(n) - x_3^{(1)}(n-1) & \cdots & x_N^{(1)}(n) - x_N^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(2) - e^{-b_1} x_1^{(1)}(1) \\ x_1^{(1)}(3) - e^{-b_1} x_1^{(1)}(2) \\ \vdots \\ x_1^{(1)}(n) - e^{-b_1} x_1^{(1)}(n-1) \end{bmatrix}$$

เมื่อได้ค่าพารามิเตอร์ $b_2^*, b_3^*, b_4^*, ..., b_N^*, u^*$ สามารถทำนาย $\hat{x}_1^{(0)}(k+1)$ จากสมการการทำนาย

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = e^{-a_1} x_1^{(1)}(k) + \sum_{j=2}^{N} b_j^* \left[x_j^{(1)}(k+1) - x_j^{(1)}(k) \right] + u^* \tag{37}$$

โดยที่ $\hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \hat{x}_1^{(1)}(k+1) - \hat{x}_1^{(1)}(k)$

ข้อสังเกต ถ้า $A^T A$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular matrix) ได้ว่าพารามิเตอร์ $\beta = [b_1^*, b_2^*, b_3^*, ..., b_N^*, u^*]^T$ มีหลายคำตอบ ดังนั้นสามารถหาค่าเหมาะสมของพารามิเตอร์ β จากนอร์ม (Norm) ของ $(A\beta - X_1)$ โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด จะได้ว่า $\beta = A^+ X_1$ โดยที่ A^+ เป็น Pseudo inverse [11] ของเมทริกซ์ A ซึ่งกำหนดโดย

$$A^+ = \left(A^T A \right)^{-1} A^T \tag{38}$$

2. การวัดประสิทธิภาพของการพยากรณ์ (Measure of forecasting performance)

ในการทดสอบความแม่นยำจากการทำนายเป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับการนำแบบจำลองเกรย์มาประยุกต์ใช้ ได้มีการทดสอบโดยใช้ตัวชี้วัด ดังนี้

1. ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละสัมบูรณ์ (Absolute Percentage Error: APE) (Ture, et al., 2006, pp. 41– 46) กำหนดโดย

$$APE = \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\% \tag{39}$$

2. ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละเฉลี่ยสัมบูรณ์ (Mean Absolute Percentage Error: MAPE) (Ture, et al., 2006, pp. 41– 46) กำหนดโดย

$$MAPE = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \right) \times 100\% \tag{40}$$

3. Root Mean Square Percentage Error (RMSPE) (Ture, et al., 2006, pp. 41– 46) กำหนดโดย

$$RMSPE = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{n}\left[(x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)) / x^{(0)}(k)\right]^2}{n-1}} \times 100\% \qquad (41)$$

โดยที่ $x^{(0)}(k)$ เป็นค่าจริง $\hat{x}^{(0)}(k)$ เป็นค่าที่ได้จากการทำนายที่เวลา k
ซึ่งสามารถเปรียบเทียบการวัดค่า MAPE และ RMSPE ของการทำนายดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบการวัดค่า MAPE และ RMSPE (Ture, et al., 2006, pp. 41– 46)

MAPE, RMSPE (%)	ประสิทธิภาพในการพยากรณ์
<10	ประสิทธิภาพในการพยากรณ์ระดับดีมาก
10-20	ประสิทธิภาพในการพยากรณ์ระดับดี
20-50	ประสิทธิภาพในการพยากรณ์ระดับพอใช้
>50	ประสิทธิภาพในการพยากรณ์ระดับน้อย

3. การประยุกต์ใช้แบบจำลอง $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$

เพื่อแสดงความแม่นยำของการทำนาย ในหัวข้อนี้จะประยุกต์ใช้แบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ ที่ปรับปรุงและแบบจำลองเกรย์รูปแบบเดิมกับตัวอย่างปัญหาปริมาณการใช้ไฟฟ้า ในประเทศไทย (GWh in Thailand)

ปริมาณการใช้ไฟฟ้า (GWh) เกิดขึ้นจากปัจจัยต่างๆ คือ จำนวนประชากร (Population) ผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศ (GDP) หุ้นดัชนี (SET index) รายได้จากการส่งออกผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม ข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณการใช้ไฟฟ้าและปัจจัยเหล่านี้เป็นข้อมูลที่รวบรวมมาตั้งแต่ปี ค.ศ.1986 ถึงปี ค.ศ. 2010 จากธนาคารแห่งประเทศไทย กรมส่งเสริมการส่งออก นโยบายและแผนสำนักพลังงาน และตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ซึ่งจะทำนายโดยใช้แบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,5)$ รูปแบบเดิม เปรียบเทียบกับแบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,5)$ แบบปรับปรุงโดยกำหนดให้

$x_1^{(0)}(t)$ แทนปริมาณการใช้ไฟฟ้า (กิโลวัตต์)
$x_2^{(0)}(t)$ แทนจำนวนประชากร (คน)
$x_3^{(0)}(t)$ แทนผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศ (ล้านล้านบาท)
$x_4^{(0)}(t)$ แทนหุ้นดัชนี (จุด)
$x_5^{(0)}(t)$ แทนรายได้จากการส่งออกผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม (ล้านล้านบาท)
t แทนเวลา (ปี)

จากการคำนวณโดยโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Matlab R2016a สามารถเปรียบเทียบผลจากการทำนายดังตาราง โดยกำหนดให้ Model 1 Model 2 Model 3 และ Model 4 เป็นแบบจำลอง ที่ทำนายโดยสมการ (12) (17) (24) และ (37) ตามลำดับ

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบค่าที่ได้จากแบบจำลอง $GMC(1,5)$ แบบเดิมและแบบปรับปรุงของปริมาณการใช้ไฟฟ้า

Year	Data	Fitting value			
		Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
1986	10162.7	10162.7	10162.7	10162.7	10162.7
1987	11319.4	19960.41	10829.99	11085.2	9595.8
1988	11942.38	3300.574	12406.24	12364.77	13765.3
1989	14328.1	14636.96	14653.15	14066.72	14006.46
1990	16717.23	17058.21	17028.96	16793.25	18008.1

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบค่าที่ได้จากแบบจำลอง $GMC(1,5)$ แบบเดิมและแบบปรับปรุงของปริมาณการใช้ไฟฟ้า (ต่อ)

Year	Data	Fitting value			
		Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
1991	19406.02	18876.49	18838.13	19265.72	19137.05
1992	21641.01	20898.08	20860.41	21875.35	21809.66
1993	24321.28	24355.77	24381.72	24613.05	22962.7
1994	27758.43	28664.43	28638.8	27772.19	28452.71
1995	31870.37	32025.3	31960.36	31123.27	31078.37
1996	34607.29	34098.8	33960.44	34309.6	35071.9
1997	36981.24	34756.98	34577.55	36369	36739.31
1998	35154.99	35801.09	35658.1	37425.42	35405.03
1999	36275.13	37934.16	37778.38	36514.61	36632.42
2000	39546.26	40069.65	39880.25	38669.14	40142.52
2001	41658.51	42157.51	41949.74	41790.77	40846.32
2002	44805.66	44353.83	44114.61	43726.37	43744.81
2003	48293.79	47156.15	46924.25	47225.74	47666.92
2004	50810.54	50635.11	50361.46	51779.6	52571.36
2005	53894.12	54378.07	54081.43	55883.79	54475.23
*2006	56994.75	58568.46	58228.69	60056.93	57593.84
*2007	59436.12	63292.66	62925.54	64131.66	60275.05
*2008	60266.29	68224.64	67778.07	67599.28	63225.75
*2009	59401.92	73481.96	73007.78	67844.65	57531.58
*2010	60315.04	80249.4	79746.4	68774.59	65240.82

* Model prediction

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบค่าผิดพลาดจากแบบจำลอง GMC(1,5) แบบเดิมและแบบปรับปรุงของปริมาณการใช้ไฟฟ้า

Year	MPE			
	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
1986	0	0	0	0
1987	76.33808	4.323663	2.069025	15.22695
1988	72.36251	3.884118	3.536933	15.26433
1989	2.155623	2.268614	1.824257	2.244843
1990	2.039719	1.864744	0.454711	7.721819

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบค่าผิดพลาดจากแบบจำลอง GMC(1,5) แบบเดิมและแบบปรับปรุงของปริมาณการใช้ไฟฟ้า (ต่อ)

Year	MPE			
	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
1991	2.728695	2.926337	0.722961	1.386019
1992	3.432956	3.607039	1.08283	0.779323
1993	0.141823	0.248513	1.199641	5.585993
1994	3.26386	3.171542	0.049564	2.501148
1995	0.486135	0.282368	2.34419	2.485053
1996	1.46932	1.869107	0.860185	1.342509
1997	6.014561	6.499759	1.655544	0.654196
1998	1.837862	1.43113	6.458338	0.711242
1999	4.573457	4.144012	0.660174	0.98495
2000	1.323479	0.844557	2.217955	1.507744
2001	1.197839	0.699097	0.317478	1.949644
2002	1.008415	1.542332	2.408828	2.367679
2003	2.355658	2.835846	2.211565	1.298036
2004	0.345259	0.883826	1.907194	3.465467
2005	0.897963	0.347558	3.691816	1.078235
*2006	2.761154	2.165006	5.372733	1.051138
*2007	6.488538	5.870881	7.900147	1.411475
*2008	13.20531	12.46432	12.16765	4.910633
*2009	23.703	22.90475	14.21289	3.148618
*2010	33.0504	32.21644	14.02561	8.166751

* Model prediction

ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบค่า MAPE และ RMSPE จากแบบจำลอง $\mathrm{GMC}(1,5)$ แบบเดิมและแบบปรับปรุงของปริมาณการใช้ไฟฟ้า

Model	MAPE		RMSPE	
	fitting value	prediction value	fitting value	prediction value
Model 1	9.6828011	13.20140058	24.253149	19.38177797
Model 2	2.2986401	12.60356602	2.825307	18.74588084
Model 3	1.8775363	8.946504792	2.379348	11.29649718
Model 4	3.6081675	3.114769206	5.6472267	4.556777227

สรุปผลการวิจัย

การปรับปรุงแบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ ด้วยการคำนวณค่าพื้นหลังแบบใหม่จากการประมาณด้วยด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลังเพื่อปรับปรุงสมการการทำนายดังกล่าว สามารถสรุปผลการทดสอบการใช้แบบจำลองจากตัวอย่างการประยุกต์ใช้แบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,5)$ ในการทำนายปริมาณการใช้ไฟฟ้าในประเทศไทย โดยพิจารณาแต่ละ k ตั้งแต่ 1 - 25 โดยค่า APE จากตารางที่ 2 แสดงว่า Model 3 และ Model 4 สามารถทำนายได้แม่นยำกว่า Model 1 และ Model 2 เมื่อพิจารณาค่า APE ตามตารางที่ 3 ซึ่งเป็นตารางเกี่ยวกับการเปรียบเทียบการวัดค่า แสดงว่า Model 3 และ Model 4 มีประสิทธิภาพในการทำนายที่ดีมาก โดย Model 4 สามารถทำนายได้ดีที่สุด และเมื่อพิจารณาค่า MAPE และ RMSPE จากตารางที่ 4 แสดงว่า Model 3 และ Model 4 มีประสิทธิภาพในการทำนายที่ดีมาก โดย Model 4 สามารถทำนายได้ดีที่สุด จากการเปรียบเทียบความถูกต้องของการทำนายจากตัวอย่างดังกล่าว แบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ ที่มีการปรับปรุงใหม่ (Model 4) มีความแม่นยำในการทำนายมากกว่าแบบเดิม (Model 1 Model 2 Model 3)

อภิปรายผล

จากการแปลงข้อมูลให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเรียบและการปรับปรุงสมการการทำนายให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ทำให้การปรับปรุงแบบจำลองเกรย์ $\mathrm{GMC}(1,\mathrm{N})$ ดังกล่าวนี้มีความแม่นยำในการทำนายดีกว่าแบบจำลองรูปแบบเดิมและสามารถใช้ในการทำนายข้อมูลเชิงตัวเลขได้หลายรูปแบบ

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

แบบจำลองที่ปรับปรุงใหม่นี้ เป็นอีกทางเลือกหนึ่งสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้ในการทำนายข้อมูลในหลาย ๆ ด้านเพื่อใช้วิเคราะห์ ตัดสินใจ หรือควบคุมผลที่จะเกิดขึ้นในอนาคตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

อย่างไรก็ตาม แบบจำลองที่ปรับปรุงใหม่นี้ ยังมีความคลาดเคลื่อนจากการทำนายอยู่ จึงควรแปลงข้อมูลให้สอดคล้องกับเงื่อนไขความเรียบและคำนวณค่าพื้นหลังจากการประมาณด้วยฟังก์ชันรูปแบบอื่น ๆ ที่สอดคล้องกับข้อมูล เพื่อให้ได้สมการการทำนายที่แม่นยำและมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

Bin, B. & Meng, Q. (2002). Research on Methods of Expending Grey Prediction Model. **Systems Engineering-Theory & Practice**, **9**, 138-141.

Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. (1976). **Time series analysis: Forecasting and control**, San Fransisco.

Bund, G. (2013). Grey System Theory and Method. **The Electronic Journal of Geotechnical Engineering**, **18**, 1256-1266.

Cui, J., Liu, S., Zeng, B. & Xie, N. (2013). A novel grey forecasting model and its optimization. **Applied Mathematical Modelling**, **37**, 4399-4406.

Evans, M. (2014). An alternative approach to estimating the parameters of a generalized Grey Verhulst model: An application to steel intensity of use in the UK. **Expert Systems with Applications**, **41**, 1236-1244.

He, Z., Wang, Q., Shen, Y. & Wang, Y. (2013). Discrete multivariate grey model based boundary extension for bi-dimensional empirical mode decomposition. **Signal Processing**, **93**, 124-138.

Quah, T.S. & Srinivasan, B. (1999). Improving returns on stock investment through neural network selection. **Expert Systems with Applications**, **17**, 295-301.

Tien, T-L. (2011). The indirect measurement of tensile strength by the new model FGMC (1,n). **Measurement**, **44**, 1884-1897.

Ture, M. & Kurt, I. (2006). Comparison of four different time series methods to forecast hepatitis A virus infection, **Expert Syst. Appl.**, **31**, 41– 46.

Wu, W.-Y. & Chen, S.-P. (2005). A prediction method using the grey model GMC(1, n) combined with the grey relational analysis: a case study on Internet access population forecast. **Applied Mathematics and Computation**, **169**, 198-217.

Xie, N. & Liu, S. (2009). Discrete grey forecasting model and its optimization. **Applied Mathematical Modelling**, **33**, 1173-1186.

Ziliang, W. (2004). Building grey model GM(1,1) with translation transformation. **Emerald Group Publishing limited**, **33**, 390-397.