รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

เสถียรภาพเวลาจำกัดและการทำให้มีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง
Finite-time Stability and Stabilization of Linear System with Interval Time-varying Delay

จิรพงศ์ พวงมาลัย[1] และ วันวิสา พวงมาลัย[2]
Jirapong Puangmalai[1] and Wanwisa Puangmalai[2]

[1] อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
[2] อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีจุดประสงค์ในการหาเงื่อนไขสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่ไม่มีตัวควบคุม และหาเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่มีตัวควบคุม ในพจน์ของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้

คำสำคัญ: ตัวหน่วงแปรผันตามเวลา / เสถียรภาพเวลาจำกัด / อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

Abstract

The main objective of this paper are to find some conditions to determine finite-time stability for linear system with interval time-varying delay without controller and with controller. Base on Lyapunov-Krasovskii functional, the finite-time stability conditions are derived in term of linear matrix inequalities.

Keywords: Time-varying delay / Finite-time stability / Linear matrix inequalities

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เสถียรภาพเวลาจำกัด (finite-time stability) เป็นการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบที่สนใจ ในช่วงเวลาจำกัด ซึ่งได้มีการศึกษาเสถียรภาพเวลาจำกัดในระบบต่าง ๆ เช่นระบบเชิงเส้น (linear systems) ระบบเครือข่ายประสาท (neural network systems) ระบบที่ถูกกระตุ้น (impulsive systems) และระบบสลับ (switched systems) เป็นต้น และเสนอเงื่อนไขเพียงพอที่จะรับประกันเสถียรภาพเวลาจำกัดในรูปแบบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequality) ฟังก์ชันไลปูนอฟ (Lyapunov function) และอื่น ๆ และตัวหน่วงแปรผันตามเวลา (time-varying delay) เป็นสิ่งที่ทำให้ระบบทำงานช้าลงและขึ้นอยู่กับเวลา มักจะเกิดขึ้นในระบบปฏิบัติการ เช่น ระบบชีวภาพ (biological systems) ระบบเคมี (chemical systems) และสาขาวิศวกรรม เป็นต้น เป็นที่รู้กันว่าการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยของตัวหน่วงทำให้เกิดความไม่แน่นอนในการทำงานที่ดีของระบบดังกล่าว เมื่อพิจารณาถึงปัญหาข้างต้นแล้วจึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจที่จะศึกษาเสถียรภาพเวลาจำกัด และการทำให้มีเสถียรภาพเวลาจำกัด (finite-time stabilization) โดยเงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้น (Amato & Ariola, 2005, pp.724–729) เงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวควบคุมหลายตัว (Moulay, et al., 2008, pp.561-566) เงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบวิยุตเชิงเวลาที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (Shen, et al., 2008) เงื่อนไขเพียงพอสำหรับการทำให้มีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นผกผันตามเวลาแบบต่อเนื่อง (Garcia, et al., 2009, pp. 364–369) เงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วง (Stojanovic, et al., 2012, pp. 25-36) เงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (Debeljkovic, et al., 2013, pp. 135-150) เงื่อนไขเพียงพอสำหรับ

เสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบวิยุตที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา (Zhang, et al., 2014, pp. 3457–3476) และ ได้มีการปรับปรุงเงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วง (Rojsiraphisal & Puangmalai, 2014, 7 pages)

จากผลงานวิจัยดังกล่าวนี้ จึงทำให้งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัด และการทำให้มีเสถียรภาพเวลาจำกัดสำหรับระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. หาเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาแบบช่วงที่ไม่มีตัวควบคุม โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้
2. หาเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาแบบช่วงที่มีตัวควบคุม โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้

ขอบเขตการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ศึกษาเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่ โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้

กรอบแนวคิดการวิจัย

การศึกษาเสถียรภาพของระบบเชิงเส้นได้มีแนวคิดมาจากตำราเรื่อง Introduction to Mathematical Control Theory (Barnett, et al., 1985)

ความรู้พื้นฐาน

สัญลักษณ์

$\mathbb{R}^{+}$ แทน เซตของจำนวนจริงบวก (set of non-negative real numbers)

$\mathbb{R}^{n}$ แทน ปริภูมิที่มี n มิติ (n-dimensional space) สำหรับ $x^T y$

$\mathrm{Re}(x)$ แทน ส่วนเป็นจำนวนจริงของ x (real part of x)

$\langle , \rangle$ แทน ผลคูณภายใน (inner product) ของเวคเตอร์

$\| \ \|$ แทน นอร์ม (norm) ของเวคเตอร์

$\mathbb{R}^{n\times n}$ แทน เมทิกซ์ค่าจริงมิติ $n\times n$ (real value matrix with dimension $n\times n$)

A^T แทน ทรานสโพสของเมทิกซ์ A (transpose of the matrix A)

$\lambda(A)$ แทน ค่าลักษณะของเมทริกซ์ A (eigenvalues of A)

$\max(A)$ แทน ค่ามากที่สุดของ $\mathrm{Re}(\lambda)$ โดยที่ $\lambda \in \lambda(A)$

$\min(A)$ แทน ค่าน้อยที่สุดของ $\mathrm{Re}(\lambda)$ โดยที่ $\lambda \in \lambda(A)$

$$\max\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\min(A)}$$

$$x_t = \left\{ x(t+s) \middle| s \in [-d_2, 0] \right\}$$

$$\|x_t\| = \sup_{s\in[d_2,0]} \sqrt{\|x(t+s)\|^2 + \|\dot{x}(t+s)\|^2}$$

$*$ แทน สมาชิกด้านล่างเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)

ประเภทของเมทริกซ์

เรียกเมทริกซ์ A ว่า เมทริกซ์ทแยง (diagonal matrix) เมื่อ สมาชิกของเมทริกซ์ที่ไม่อยู่ในแนวทแยงเป็นศูนย์ทั้งหมด

เรียกเมทริกซ์ A ว่า เมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (semi-positive definite matrix) ($A \geq 0$) ถ้า $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ ทุกสมาชิก $x \in \mathbb{R}^n$

เรียกเมทริกซ์ A ว่า เมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite matrix) ($A > 0$) ถ้า $\langle Ax, x\rangle > 0$ ทุกสมาชิก $x \neq 0$

$A > B$ คือ $A - B > 0$

เสถียรภาพ

พิจารณาระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + A_2 x(t-h(t)) + Bu(t) \tag{1}$$

เมื่อ $t > 0, x(t) \in \mathbb{R}^n$ คือ เวคเตอร์ที่สอดคล้องกับระบบ, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ เป็นตัวควบคุมที่นำเข้า $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^n$ และ $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ที่ทราบค่า, τ เป็นตัวหน่วงค่าคงที่ที่มากกว่าศูนย์และ $h(t)$ เป็นตัวหน่วงเต็มหน่วยที่เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้โดยสอดคล้องกับ

$$h_1 \leq h(t) \leq h_2 \text{ และ } d_1 \leq h(t) \leq d_2,$$

เมื่อ $d_1 = \min\{\tau, h_1\},\ d_2 = \max\{\tau, h_2\}$

โดยสมมติเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ดังนี้ $x(t+\theta) = \phi(\theta)$ สำหรับ $\theta \in [-d_2, 0]$ และ $\phi(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันค่าเริ่มต้นที่หาอนุพันธ์ได้ของเวคเตอร์ (differentiable vector-valued initial function)

$\|\phi\| := \sup_{t\in[-d_2,0]} \{\|\phi(t)\|, \|\dot{\phi}(t)\|\}$

กฎการควบคุมย้อนกลับ (state-feedback control law)

$$u(t) = Kx(t) \tag{2}$$

เมื่อ K คือพารามิเตอร์ที่ถูกกำหนด (design parameter) ภายใต้กฎการควบคุมในสมการ (2) จะได้ระบบวงวนปิด (closed-loop system) ดังนี้

$$\dot{x}(t) = \hat{A}_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + A_2 x(t-h(t)) \tag{3}$$

เมื่อ $\hat{A}_0 = A_0 + BK$

บทนิยาม เสถียรภาพเวลาจำกัด

จะกล่าวว่าระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง (1) มีเสถียรภาพเวลาจำกัด (FTS) สอดคล้องกับ (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \leq c_1 < c_2$

$$\text{ถ้า } \|\phi\|^2 \leq c_1 \text{ แล้ว } \|x(t)\|^2 \leq c_2 \text{ สำหรับ } t \in [0, T]$$

บทตั้ง 1. สำหรับเมทริกซ์บวกแน่นอน $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ สเกลาร์ $\sigma \geq 0$ และฟังก์ชันเวคเตอร์ $\omega : [0,\sigma] \to \mathbb{R}^n$ ที่ซึ่งกำหนดปริพันธ์ดีแล้ว

$$\left(\int_0^\sigma \omega(s)ds\right)^T M \left(\int_0^\sigma \omega(s)ds\right) \leq \sigma \int_0^\sigma \omega^T(s) M \omega(s) ds$$

บทตั้ง 2. บทตั้งส่วนเติมเต็มเชอร์ (Schur complement lemma)

ให้เมทริกฐ์ค่าคงที่ (constant matrices) X, Y, Z ที่มีมิติที่เหมาะสมและสอดคล้องกับ $Y = Y^T > 0$ แล้ว $X + Z^T Y^{-1} Z < 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} X & Z^T \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0 \text{ หรือ } \begin{bmatrix} -Y & Z \\ Z^T & X \end{bmatrix} < 0$$

สูตรนิวตัน-ไลบ์นิซ (Newton-Leibniz formula)

$$\int_{t-k}^{t} \dot{x}(s)ds \leq x(t) - x(t-k)$$

ผลลัพธ์หลัก

ในส่วนนี้จะแสดงเงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง โดยพิจารณาระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่ตัวควบคุม $u(t)=0$

ทฤษฎีบท 1. ระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง (1) โดยที่ $u(t)=0$ τ เป็นตัวหน่วงเชิงเวลา (time-delay) และ $h(t)$ เป็นตัวหน่วงแปรผันตามเวลา (time-varying delay) จะมีเสถียรภาพเวลาจำกัดที่สอดคล้องกับ (c_1, c_2, T) เมื่อ $c_1 < c_2$ ถ้ามีสเกลาร์ $\alpha > 0$ เมทริกซ์ $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, R_3$ ที่เป็นเมทริกซ์สมมาตรและบวกแน่นอน (symmetric and positive definite matrix) และสเกลาร์บวก $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ ที่ซึ่ง

$$\begin{aligned} &\beta_1 I < P < \beta_2 I,\ 0 < Q_1 < \beta_3 I, \\ &0 < Q_2 < \beta_3 I,\ 0 < R_1 < \beta_5 I, \\ &0 < R_2 < \beta_6 I,\ 0 < R_3 < \beta_7 I, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T} & \beta_2\sqrt{c_1} & \beta_3\sqrt{c_1 d_1} & \beta_4\sqrt{c_1 d_2} & \beta_5 d_1\sqrt{c_1} & \beta_6 d_2\sqrt{c_1} & \beta_7 (d_2 - d_1)\sqrt{c_1} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\beta_7 \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

กรณี $\tau < h_1$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & PA_2 & R_2 & A_0^T P \\ * & \Psi_{22} & R_3 & 0 & 0 & A_1^T P \\ * & * & -2R_3 & R_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2R_3 & R_3 & A_2^T P \\ * & * & * & * & -R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Psi_{66} \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} &\Psi_{11} = A_0^T P + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2, \\ &\Psi_{12} = PA_1 + R_1, \qquad \Psi_{22} = -(Q_1 + R_1 + R_3), \\ &\Psi_{66} = \tau^2 R_1 + h_2^2 R_2 + (h_2 - \tau)^2 R_3 - 2P \end{aligned}$$

หรือ กรณี $h_2 < \tau$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & R_1 & PA_2 & 0 & A_0^T P \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 & R_3 & A_1^T P \\ * & * & -R_3 & R_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2R_3 & R_3 & A_2^T P \\ * & * & * & * & -2R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} &\Psi_{11} = A_0^T P + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2, \\ &\Psi_{12} = PA_1 + R_2, \qquad \Psi_{22} = -2(Q_2 + R_2 + R_3), \\ &\Psi_{66} = h_1^2 R_1 + \tau^2 R_2 + (\tau - h_1)^2 R_3 - 2P \end{aligned}$$

หรือ กรณี $h_1 < \tau < h_2$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PA_1 & R_1 & \Sigma_{14} & R_2 & A_0^T P \\ * & -2R_3 & R_3 & -A_1^T P & R_3 & A_1^T P \\ * & * & \Sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2PA_2 & 0 & \Sigma_{46} \\ * & * & * & * & \Sigma_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Sigma_{66} \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

เมื่อ
$$\Sigma_{11} = A_0^T P + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2,$$
$$\Sigma_{14} = PA_2 - A_0^T P, \qquad \Sigma_{33} = -(Q_1 + R_1 + R_3),$$
$$\Sigma_{46} = A_2^T P + P, \qquad \Sigma_{55} = -(Q_2 + R_2 + R_3),$$
$$\Sigma_{66} = h_1^2 R_1 + h_2^2 R_2 + (h_2 - h_1)^2 R_3 - 2P$$

การพิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ $V(x(t)) = \sum_{i=1}^{6} V_i(x(t))$

เมื่อ
$$V_1(x(t)) = e^{\alpha t} x^T(t) P x(t),$$
$$V_2(x(t)) = e^{\alpha t} \int_{t-d_1}^{t} x^T(s) Q_1 x(s) ds,$$
$$V_3(x(t)) = e^{\alpha t} \int_{t-d_2}^{t} x^T(s) Q_2 x(s) ds,$$
$$V_4(x(t)) = d_1 e^{\alpha t} \int_{-d_1}^{0} \int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta) R_1 \dot{x}(\theta) d\theta ds,$$
$$V_5(x(t)) = d_2 e^{\alpha t} \int_{-d_2}^{0} \int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta) R_2 \dot{x}(\theta) d\theta ds,$$
$$V_6(x(t)) = (d_2 - d_1) e^{\alpha t} \int_{-d_2}^{0} \int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta) R_3 \dot{x}(\theta) d\theta ds$$

หาอนุพันธ์ของ $V(x(t))$ เทียบกับ x และแทนสมการ (1) โดยที่ $u(t) = 0$ จะได้
$$\dot{V}_1(x(t)) = 2e^{\alpha t} x^T(t) P \dot{x}(t) + \alpha V_1(x(t))$$
$$= 2e^{\alpha t} x^T(t) P\left[A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + A_2 x(t-h(t))\right] + \alpha V_1(x(t));$$
$$\dot{V}_2(x(t)) = e^{\alpha t}\left[x^T(t) Q_1 x(t) - x^T(t-d_1) Q_1 x(t-d_1)\right] + \alpha V_2(x(t));$$
$$\dot{V}_3(x(t)) = e^{\alpha t}\left[x^T(t) Q_2 x(t) - x^T(t-d_2) Q_2 x(t-d_2)\right] + \alpha V_3(x(t));$$
$$\dot{V}_4(x(t)) = d_1 e^{\alpha t}\left[d_1 \dot{x}^T(t) R_1 \dot{x}(t) - \int_{t-d_1}^{t} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds\right] + \alpha V_4(x(t));$$
$$\dot{V}_5(x(t)) = d_2 e^{\alpha t}\left[d_2 \dot{x}^T(t) R_2 \dot{x}(t) - \int_{t-d_2}^{t} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds\right] + \alpha V_5(x(t));$$
$$\dot{V}_6(x(t)) = (d_2 - d_1) e^{\alpha t}\left[(d_2 - d_1) \dot{x}^T(t) R_3 \dot{x}(t) - \int_{t-d_2}^{t-d_1} \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds\right] + \alpha V_6(x(t))$$

จากบทตั้ง 1 และสูตรนิวตัน-ไลบ์นิซ $\int_{t-d_i}^{t} \dot{x}(s) ds \le x(t) - x(t-d_i),\ i = 1,2$

จะได้
$$-d_i \int_{t-d_i}^{t} \dot{x}^T(s) R_i \dot{x}(s) ds \le -\left[\int_{t-d_i}^{t} \dot{x}(s) ds\right]^T R_i \left[\int_{t-d_i}^{t} \dot{x}(s) ds\right]$$
$$\le \left[x(t) - x(t-d_i)\right]^T R_i \left[x(t) - x(t-d_i)\right] \tag{9}$$

พิจารณา กรณี $\tau < h_1$ จะได้ว่า $d_1 = \tau < h_1 \le h(t) \le h_2 = d_2$

พิจารณา $\dot{V}_2(x(t))$ $\dot{V}_3(x(t))$ $\dot{V}_4(x(t))$ $\dot{V}_5(x(t))$ $\dot{V}_6(x(t))$ และ (8) จะได้ว่า

$$\dot{V}_2(x(t)) = e^{\alpha t}\left[x^T(t)Q_1x(t) - x^T(t-\tau)Q_1x(t-\tau)\right] + \alpha V_2(x(t));$$
$$\dot{V}_3(x(t)) = e^{\alpha t}\left[x^T(t)Q_2x(t) - x^T(t-h_2)Q_2x(t-h_2)\right] + \alpha V_3(x(t));$$
$$\dot{V}_4(x(t)) \le \tau^2 e^{\alpha t}\dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) - \left[x(t)-x(t-\tau)\right]^T R_1\left[x(t)-x(t-\tau)\right] + \alpha V_4(x(t));$$
$$\dot{V}_5(x(t)) \le h_2^2 e^{\alpha t}\dot{x}^T(t)R_2\dot{x}(t) - \left[x(t)-x(t-h_2)\right]^T R_2\left[x(t)-x(t-h_2)\right] + \alpha V_4(x(t));$$
$$\dot{V}_6(x(t)) \le (h_2-\tau)^2 e^{\alpha t}\dot{x}^T(t)R_3\dot{x}(t) - (h_2-\tau)\int_{t-h_2}^{t-\tau}\dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds + \alpha V_6(x(t))$$

พิจารณา $\int_{t-h_2}^{t-\tau}\dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds = \int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds + \int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds + \int_{t-h_1}^{t-\tau}\dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds$

และใช้ (9) จะได้
$$\begin{aligned} -(h_2-\tau)\int_{t-h_2}^{t-\tau}\dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds \le &-\left[x(t-h(t))-x(t-h_2)\right]^T R_3\left[x(t-h(t))-x(t-h_2)\right] \\ &-\left[x(t-h_1)-x(t-h(t))\right]^T R_3\left[x(t-h_1)-x(t-h(t))\right] \\ &-\left[x(t-\tau)-x(t-h_1)\right]^T R_3\left[x(t-\tau)-x(t-h_1)\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) - 2\alpha V(x(t)) \le e^{\alpha t}\{ &x^T(t)\left[A_0^TP + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2\right]x(t) \\ &+2x^T(t)[PA_1+R_1]x(t-\tau) + 2x^T(t)PA_2x(t-h(t)) \\ &+2x^T(t)R_2x(t-h_2) - 2x^T(t-\tau)[Q_1+R_1+R_3]x(t-\tau) \\ &+2x^T(t-\tau)R_3x(t-h_1) - 2x^T(t-h_1)R_3x(t-h_1) \\ &+2x^T(t-h_1)R_3x(t-h(t)) - 2x^T(t-h(t))R_3x(t-h(t)) \\ &+2x^T(t-h(t))R_3x(t-h_2) - x^T(t-h_2)R_3x(t-h_2) \\ &+\dot{x}^T(t)\left[\tau^2R_1 + h_2^2R_2 + (h_2-\tau)^2R_3\right]\dot{x}(t)\} \end{aligned} \tag{10}$$

พิจารณาสมการ $\dot{x}(t) - A_0x(t) - A_1x(t-\tau) - A_2x(t-h(t)) = 0$

คูณสมการข้างต้นด้วย $-2\dot{x}^T(t)P$ จะได้
$$-2\dot{x}^T(t)P\dot{x}(t) + 2\dot{x}^T(t)PA_0x(t) + 2\dot{x}^T(t)PA_1x(t-\tau) + 2\dot{x}^T(t)PA_2x(t-h(t)) = 0 \tag{11}$$

นำสมการ (11) บวกเข้าสมการ (10) จะได้
$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) - 2\alpha V(x(t)) \le e^{\alpha t}\{ &x^T(t)\left[A_0^TP + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2\right]x(t) \\ &+2x^T(t)\left[PA_1+R_1\right]x(t-\tau) + 2x^T(t)PA_2x(t-h(t)) \\ &+2x^T(t)R_2x(t-h_2) + 2x^T(t)A_0^TP\dot{x}(t) \\ &-2x^T(t-\tau)[Q_1+R_1+R_3]x(t-\tau) + 2x^T(t-\tau)R_3x(t-h_1) \\ &+2x^T(t-\tau)A_1^TP\dot{x}(t) - 2x^T(t-h_1)R_3x(t-h_1) \\ &+2x^T(t-h_1)R_3x(t-h(t)) - 2x^T(t-h(t))R_3x(t-h(t)) \\ &+2x^T(t-h(t))R_3x(t-h_2) + 2x^T(t-h(t))A_2^TP\dot{x}(t) \\ &-x^T(t-h_2)R_3x(t-h_2) + \dot{x}^T(t)\left[\tau^2R_1 + h_2^2R_2 + (h_2-\tau)^2R_3 - 2P\right]\dot{x}(t)\} \\ &= \zeta^T(t)\Psi\zeta(t) \end{aligned}$$

เมื่อ $\zeta(t) = \left[x^T(t)\ x^T(t-\tau)\ x^T(t-h_1)\ x^T(t-h(t))\ x^T(t-h_2)\ \dot{x}^T(t)\right]^T$

พิจารณา กรณี $h_2 < \tau$ จะได้ว่า $d_1 = h_1 \le h(t) \le h_2 < \tau = d_2$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีแรก จะได้
$$\dot{V}(x(t)) - 2\alpha V(x(t)) \ge e^{\alpha t}\{x^T(t)\left[A_0^TP + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2\right]x(t)$$

$$
\begin{aligned}
&+2x^T(t)[PA_1+R_2]x(t-\tau)+2x^T(t)R_1x(t-h_1)\\
&+2x^T(t)PA_2x(t-h(t))+2x^T(t)A_0^TP\dot{x}(t)\\
&-2x^T(t-\tau)[Q_2+R_2+R_3]x(t-\tau)+2x^T(t-\tau)R_3x(t-h_2)\\
&+2x^T(t-\tau)A_1^TP\dot{x}(t)-x^T(t-h_1)R_3x(t-h_1)\\
&+2x^T(t-h_1)R_3x(t-h(t))-2x^T(t-h(t))R_3x(t-h(t))\\
&+2x^T(t-h(t))R_3x(t-h_2)+2x^T(t-h(t))A_2^TP\dot{x}(t)\\
&-2x^T(t-h_2)R_3x(t-h_2)+\dot{x}^T(t)\left[h_1^2R_1+\tau^2R_2+(\tau-h_1)^2R_3-2P\right]\dot{x}(t)\Big\}\\
&=\zeta^T(t)\Phi\zeta(t)
\end{aligned}
$$

พิจารณา กรณี $h_1<\tau<h_2$ จะได้ว่า $d_1=h_1<\tau<h_2=d_2$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีแรก จะได้

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x(t))-2\alpha V(x(t))\le e^{\alpha t}\Big\{&x^T(t)\left[A_0^TP+PA_0-\alpha P+Q_1+Q_2-R_1-R_2\right]x(t)\\
&+2x^T(t)PA_1x(t-\tau)+2x^T(t)R_1x(t-h_1)\\
&+2x^T(t)\left[PA_2-A_0^TP\right]x(t-h(t))+2x^T(t)R_2x(t-h_2)\\
&+2x^T(t)A_0^TP\dot{x}(t)-2x^T(t-\tau)R_3x(t-\tau)\\
&+2x^T(t-\tau)R_3x(t-h_1)-2x^T(t-\tau)A_1^TPx(t-h(t))\\
&+2x^T(t-\tau)R_3x(t-h_2)+2x^T(t-\tau)A_1^TP\dot{x}(t)\\
&-x^T(t-h_1)[Q_1+R_1+R_3]x(t-h_1)-2x^T(t-h(t))PA_2x(t-h(t))\\
&+2x^T(t-h(t))\left[A_2^TP+P\right]\dot{x}(t)-2x^T(t-h_2)[Q_2+R_2+R_3]x(t-h_2)\\
&+\dot{x}^T(t)\left[h_1^2R_1+h_2^2R_2+(h_2-h_1)^2R_3-2P\right]\dot{x}(t)\Big\}\\
=\ &\zeta^T(t)\Sigma\zeta(t)
\end{aligned}
$$

จากทุกกรณีและเงื่อนไข (6) (7) และ (8) จะได้ว่า $\qquad \dot{V}(x(t))<2\alpha V(x(t)) \qquad (12)$

นำ $e^{-2\alpha t}$ คูณอสมการ (12) จะได้ $\qquad \dfrac{d}{dx}\left(e^{-2\alpha t}V(x(t))\right)<0 \qquad (13)$

หาปริพันธ์ของอสมการ (13) จาก 0 ถึง t โดยที่ $t\in[0,T]$ จะได้ $V(x(t))<e^{2\alpha T}V(x(0)) \qquad (14)$

พิจารณา $V(x(t))$ จะได้ $\qquad V(x(t))>e^{\alpha t}x^T(t)Px(t)\ge e^{\alpha t}\lambda_{\min}(P)\|x(t)\|^2 \qquad (15)$

และเมื่อ $t=0$ จะได้

$$
\begin{aligned}
V(x(0))&=x^T(0)Px(0)+\int_{-d_1}^{0}x^T(s)Q_1x(s)ds+\int_{-d_2}^{0}x^T(s)Q_2x(s)ds\\
&+d_1\int_{-d_1}^{0}\int_{s}^{0}\dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds+d_2\int_{-d_2}^{0}\int_{s}^{0}\dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds\\
&+(d_2-d_1)\int_{-d_2}^{0}\int_{s}^{0}\dot{x}^T(\theta)R_3\dot{x}(\theta)d\theta ds\\
&\le c_1\big[\lambda_{\max}(P)+d_1\lambda_{\max}(Q_1)+d_2\lambda_{\max}(Q_2)\\
&\quad +d_1^2\lambda_{\max}(R_1)+d_2^2\lambda_{\max}(R_2)+(d_2-d_1)^2\lambda_{\max}(R_3)\big] \qquad (16)
\end{aligned}
$$

จาก (14) (15) และ (17) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x(t)\|^2\le\frac{c_1e^{\alpha t}}{\lambda_{\min}(P)}\big[&\lambda_{\max}(P)+d_1\lambda_{\max}(Q_1)+d_2\lambda_{\max}(Q_2)\\
&+d_1^2\lambda_{\max}(R_1)+d_2^2\lambda_{\max}(R_2)+(d_2-d_1)^2\lambda_{\max}(R_3)\big] \qquad (17)
\end{aligned}
$$

จากบทตั้ง 2 จะได้ $\qquad \Omega\equiv\Pi$

เมื่อ $\qquad \Pi=\left[\beta_2+d_1\beta_3+d_2\beta_4+d_1^2\beta_5+d_2^2\beta_6+(d_2-d_1)^2\beta_7\right]c_1-\beta_1c_2e^{-\alpha T}<0 \qquad (18)$

จากอสมการ (4) (17) และ (18) จะได้ $\qquad \|x(t)\|^2\le c_2,\forall t\in[0,T]$

ดังนั้น ระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง (1) ที่ $u(t)=0$ มีเสถียรภาพเวลาจำกัด $\square$

ต่อไปจะแสดงเงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง โดยพิจารณาระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง (1) กับตัวควบคุม $u(t)=Kx(t)$ ภายใต้กฎการควบคุม ซึ่งสามารถเขียนในระบบวงวนปิดได้ดัง (3)

ทฤษฎีบท 2. ระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงในรูปของระบบวงวนปิด (3) จะมีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1,c_2,T) เมื่อ $c_1<c_2$ ถ้ามีสเกลาร์ $\alpha>0$ เมทริกซ์ X,Y_1,Y_2,U_1,U_2,U_3,Z ที่เป็นเมทริกซ์สมมาตรและบวกแน่นอน ที่ซึ่ง

กรณี $\tau<h_1$

$$\Theta=\begin{bmatrix}\Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 & A_2X & U_2 & XA_0^T+Z^TB^T\\ * & \Theta_{22} & U_3 & 0 & 0 & XA_1^T\\ * & * & -2U_3 & U_3 & 0 & 0\\ * & * & * & -2U_3 & U_3 & XA_2^T\\ * & * & * & * & -U_3 & 0\\ * & * & * & * & * & \Theta_{66}\end{bmatrix}<0, \quad (19)$$

เมื่อ

$$\Theta_{11}=XA_0^T+Z^TB^T+A_0X+BZ-\alpha X+Y_1+Y_2-U_1-U_2,$$
$$\Theta_{12}=A_1X+U_1, \qquad \Theta_{22}=-(Y_1+U_1+U_3),$$
$$\Theta_{66}=\tau^2U_1+h_2^2U_2+(h_2-\tau)^2U_3-2X$$

หรือ กรณี $h_2<\tau$

$$\Xi=\begin{bmatrix}\Xi_{11} & \Xi_{12} & U_1 & A_2X & 0 & XA_0^T+Z^TB^T\\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & U_3 & XA_1^T\\ * & * & -U_3 & U_3 & 0 & 0\\ * & * & * & -2U_3 & U_3 & XA_2^T\\ * & * & * & * & -2U_3 & 0\\ * & * & * & * & * & \Xi_{66}\end{bmatrix}<0, \quad (20)$$

เมื่อ

$$\Xi_{11}=XA_0^T+Z^TB^T+A_0X+BZ-\alpha X+Y_1+Y_2-U_1-U_2,$$
$$\Xi_{12}=A_1X+U_2, \qquad \Xi_{22}=-2(Y_2+U_2+U_3),$$
$$\Xi_{66}=h_1^2U_1+\tau^2U_2+(\tau-h_1)^2U_3-2X$$

หรือ กรณี $h_1<\tau<h_2$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & A_1X & U_1 & \Gamma_{14} & U_2 & XA_0^T+Z^TB^T\\ * & -2U_3 & U_3 & -XA_1^T & U_3 & XA_1^T\\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -2A_2X & 0 & \Gamma_{46}\\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0\\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66}\end{bmatrix}<0, \quad (21)$$

เมื่อ

$$\Gamma_{11}=XA_0^T+Z^TB^T+A_0X+BZ-\alpha X+Y_1+Y_2-U_1-U_2,$$
$$\Gamma_{14}=A_2X-XA_0^T-Z^TB^T, \qquad \Gamma_{33}=-(Y_1+U_1+U_3),$$
$$\Gamma_{46}=XA_2^T+X, \qquad \Gamma_{55}=-(Y_2+U_2+U_3),$$
$$\Gamma_{66}=h_1^2U_1+h_2^2U_2+(h_2-h_1)^2U_3-2X$$

และ

$$c_1e^{\alpha T}\lambda_{\max}(X)\left[\frac{1}{\lambda_{\min}(X)}+\frac{d_1}{\lambda_{\min}(XY_1^{-1}X)}+\frac{d_2}{\lambda_{\min}(XY_2^{-1}X)}\right.$$

$$+\frac{d_1^{\,2}}{\lambda_{\min}\left(XU_1^{-1}X\right)}+\frac{d_2^{\,2}}{\lambda_{\min}\left(XU_2^{-1}X\right)}+\frac{\left(d_2-d_1\right)^2}{\lambda_{\min}\left(XU_3^{-1}X\right)}\Bigg]<c_2$$

เมื่อตัวควบคุมกำหนดโดย $K=ZX^{-1}$

การพิสูจน์ กรณี $\tau<h_1$

จาก (6) แทน A_0 ด้วย $\hat{A}_0=A_0+BK$ จะได้

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 & PA_2 & R_2 & A_0^TP+K^TB^TP \\ * & G_{22} & R_3 & 0 & 0 & A_1^TP \\ * & * & -2R_3 & R_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2R_3 & R_3 & A_2^TP \\ * & * & * & * & -R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & G_{66} \end{bmatrix}<0, \qquad (22)$$

เมื่อ
$$G_{11}=A_0^TP+K^TB^TP+PA_0+PBK-\alpha P+Q_1+Q_2-R_1-R_2,$$
$$G_{12}=PA_1+R_1, \qquad G_{22}=-\left(Q_1+R_1+R_3\right),$$
$$G_{66}=\tau^2R_1+h_2^2R_2+\left(h_2-\tau\right)^2R_3-2P$$

คูณเมทริกซ์ทแยง $\left\{P^{-1},P^{-1},P^{-1},P^{-1},P^{-1},P^{-1}\right\}$ ทางด้านหน้าและด้านหลัง (22) จะได้

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & A_2P^{-1} & P^{-1}R_2P^{-1} & P^{-1}A_0^T+P^{-1}K^TB^T \\ * & H_{22} & P^{-1}R_3P^{-1} & 0 & 0 & P^{-1}A_1^T \\ * & * & -2P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}R_3P^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -2P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}A_2^T \\ * & * & * & * & -P^{-1}R_3P^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & H_{66} \end{bmatrix}<0, \qquad (23)$$

เมื่อ
$$H_{11}=P^{-1}A_0^T+P^{-1}K^TB^T+A_0P^{-1}+BKP^{-1}-\alpha P^{-1}$$
$$+P^{-1}Q_1P^{-1}+P^{-1}Q_2P^{-1}-P^{-1}R_1P^{-1}-P^{-1}R_2P^{-1},$$
$$H_{12}=A_1P^{-1}+P^{-1}R_1P^{-1}, \qquad H_{22}=-\left(P^{-1}Q_1P^{-1}+P^{-1}R_1P^{-1}+P^{-1}R_3P^{-1}\right),$$
$$H_{66}=\tau^2P^{-1}R_1P^{-1}+h_2^2P^{-1}R_2P^{-1}+\left(h_2-\tau\right)^2P^{-1}R_3P^{-1}-2P^{-1}$$

กำหนดให้ $P^{-1}=X, Z=KP^{-1}, Y_1=P^{-1}Q_1P^{-1}, Y_2=P^{-1}Q_2P^{-1}, U_1=P^{-1}R_1P^{-1}, U_2=P^{-1}R_2P^{-1}$ และ $U_3=P^{-1}R_3P^{-1}$ และจะได้ว่า (23) สมมูลกับ (19)

กรณี $h_2<\tau$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีแรก จะได้

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & P^{-1}R_1P^{-1} & A_2P^{-1} & 0 & P^{-1}A_0^T+P^{-1}K^TB^T \\ * & L_{22} & 0 & 0 & P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}A_1^T \\ * & * & -P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}R_3P^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -2P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}A_2^T \\ * & * & * & * & -2P^{-1}R_3P^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & L_{66} \end{bmatrix}<0, \qquad (24)$$

เมื่อ

$$L_{11} = P^{-1}A_0^T + P^{-1}K^TB^T + A_0P^{-1} + BKP^{-1} - \alpha P^{-1} + P^{-1}QP^{-1}_1 + P^{-1}Q_2P^{-1} - P^{-1}R_1P^{-1} - P^{-1}R_2P^{-1},$$

$$L_{12} = A_1P^{-1} + P^{-1}R_2P^{-1}, \qquad L_{22} = -\left(P^{-1}Q_2P^{-1} + P^{-1}R_2P^{-1} + P^{-1}R_3P^{-1}\right),$$

$$L_{66} = h_1^2P^{-1}R_1P^{-1} + \tau^2P^{-1}R_2P^{-1} + (\tau - h_1)^2 P^{-1}R_3P^{-1} - 2P^{-1}$$

จะได้ว่า (24) สมมูลกับ (20)

กรณี $h_1 < \tau < h_2$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีแรก จะได้

$$\begin{bmatrix} N_{11} & A_1P^{-1} & P^{-1}R_1P^{-1} & N_{14} & P^{-1}R_2P^{-1} & P^{-1}A_0^T + P^{-1}K^TB^T \\ * & -2P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}R_3P^{-1} & -P^{-1}A_1^T & P^{-1}R_3P^{-1} & P^{-1}A_1^T \\ * & * & N_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2PA_2 & 0 & N_{46} \\ * & * & * & * & N_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & N_{66} \end{bmatrix} < 0, \tag{25}$$

เมื่อ

$$N_{11} = P^{-1}A_0^T + P^{-1}K^TB^T + A_0P^{-1} + BKP^{-1} - \alpha P^{-1} + P^{-1}QP^{-1}_1 + P^{-1}Q_2P^{-1} - P^{-1}R_1P^{-1} - P^{-1}R_2P^{-1},$$

$$N_{14} = A_2P^{-1} - P^{-1}A_0^T - P^{-1}K^TB^T,$$

$$N_{33} = -\left(P^{-1}Q_1P^{-1} + P^{-1}R_1P^{-1} + P^{-1}R_3P^{-1}\right),$$

$$N_{46} = P^{-1}A_2^T - P^{-1},$$

$$N_{55} = -\left(P^{-1}Q_2P^{-1} + P^{-1}R_2P^{-1} + P^{-1}R_3P^{-1}\right),$$

$$N_{66} = h_1^2P^{-1}R_1P^{-1} + h_2^2P^{-1}R_2P^{-1} + (h_2 - h_1)^2 P^{-1}R_3P^{-1} - 2P^{-1}$$

จะได้ว่า (25) สมมูลกับ (21)

จาก (17) $P^{-1} = X, Z = KP^{-1}, Y_1 = P^{-1}Q_1P^{-1}, Y_2 = P^{-1}Q_2P^{-1}, U_1 = P^{-1}R_1P^{-1}, U_2 = P^{-1}R_2P^{-1}$ และ $U_3 = P^{-1}R_3P^{-1}$ จะได้

$$\|x(t)\|^2 \le \frac{c_1e^{\alpha t}}{\lambda_{\min}(X^{-1})}\Big[\lambda_{\max}(X^{-1}) + d_1\lambda_{\max}(X^{-1}Y_1X^{-1}) + d_2\lambda_{\max}(X^{-1}Y_2X^{-1}) + d_1^2\lambda_{\max}(X^{-1}U_1X^{-1}) + d_2^2\lambda_{\max}(X^{-1}U_2X^{-1}) + (d_2 - d_1)^2\lambda_{\max}(X^{-1}U_3X^{-1})\Big]$$

และในทางกลับกัน จะได้

$$\|x(t)\|^2 \le c_1e^{\alpha t}\lambda_{\min}(P)\left[\frac{1}{\lambda_{\min}(X)} + \frac{d_1}{\lambda_{\min}(X^{-1}Y_1X^{-1})} + \frac{d_2}{\lambda_{\min}(X^{-1}Y_2X^{-1})} + \frac{d_1^2}{\lambda_{\min}(X^{-1}U_1X^{-1})} + \frac{d_2^2}{\lambda_{\min}(X^{-1}U_2X^{-1})} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{\lambda_{\min}(X^{-1}U_3X^{-1})}\right] < c_2$$

ดังนั้น ระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงในรูปของระบบวงวนปิด (3) มีเสถียรภาพเวลาจำกัด □

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยฉบับนี้ได้ศึกษาเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง ซึ่งสามารถหาเงื่อนไขสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่ไม่มีตัวควบคุม โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ คือ เมื่อกำหนด c_1, c_2, T โดยที่ $c_1 < c_2$ และมีสเกลาร์ $\alpha > 0$ เมทริกซ์ $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, R_3$ ที่เป็นเมทริกซ์สมมาตรและบวกแน่นอน (symmetric and positive definite matrix) สเกลาร์บวก $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ ที่ซึ่ง

$$\beta_1 I < P < \beta_2 I,\ 0 < Q_1 < \beta_3 I,$$
$$0 < Q_2 < \beta_3 I,\ 0 < R_1 < \beta_5 I,$$
$$0 < R_2 < \beta_6 I,\ 0 < R_3 < \beta_7 I,$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T} & \beta_2\sqrt{c_1} & \beta_3\sqrt{c_1 d_1} & \beta_4\sqrt{c_1 d_2} & \beta_5 d_1\sqrt{c_1} & \beta_6 d_2\sqrt{c_1} & \beta_7(d_2-d_1)\sqrt{c_1} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\beta_7 \end{bmatrix} < 0,$$

กรณี $\tau < h_1$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & PA_2 & R_2 & A_0^T P \\ * & \Psi_{22} & R_3 & 0 & 0 & A_1^T P \\ * & * & -2R_3 & R_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2R_3 & R_3 & A_2^T P \\ * & * & * & * & -R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Psi_{66} \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ
$$\Psi_{11} = A_0^T P + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2,$$
$$\Psi_{12} = PA_1 + R_1, \qquad \Psi_{22} = -(Q_1 + R_1 + R_3),$$
$$\Psi_{66} = \tau^2 R_1 + h_2^2 R_2 + (h_2 - \tau)^2 R_3 - 2P$$

หรือ กรณี $h_2 < \tau$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & R_1 & PA_2 & 0 & A_0^T P \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 & R_3 & A_1^T P \\ * & * & -R_3 & R_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2R_3 & R_3 & A_2^T P \\ * & * & * & * & -2R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ
$$\Psi_{11} = A_0^T P + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2,$$
$$\Psi_{12} = PA_1 + R_2, \qquad \Psi_{22} = -2(Q_2 + R_2 + R_3),$$
$$\Psi_{66} = h_1^2 R_1 + \tau^2 R_2 + (\tau - h_1)^2 R_3 - 2P$$

หรือ กรณี $h_1 < \tau < h_2$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PA_1 & R_1 & \Sigma_{14} & R_2 & A_0^T P \\ * & -2R_3 & R_3 & -A_1^T P & R_3 & A_1^T P \\ * & * & \Sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2PA_2 & 0 & \Sigma_{46} \\ * & * & * & * & \Sigma_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Sigma_{66} \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ

$$\Sigma_{11} = A_0^T P + PA_0 - \alpha P + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_2,$$
$$\Sigma_{14} = PA_2 - A_0^T P, \qquad \Sigma_{33} = -\left(Q_1 + R_1 + R_3\right),$$
$$\Sigma_{46} = A_2^T P + P, \qquad \Sigma_{55} = -\left(Q_2 + R_2 + R_3\right),$$
$$\Sigma_{66} = h_1^2 R_1 + h_2^2 R_2 + \left(h_2 - h_1\right)^2 R_3 - 2P$$

และหาเงื่อนไขสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่มีตัวควบคุม โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ คือ เมื่อกำหนด c_1, c_2, T โดยที่ $c_1 < c_2$ และมีสเกลาร์ $\alpha > 0$ เมทริกซ์ $X, Y_1, Y_2, U_1, U_2, U_3, Z$ ที่เป็นเมทริกซ์สมมาตรและบวกแน่นอน ที่ซึ่ง

กรณี $\tau < h_1$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 & A_2 X & U_2 & XA_0^T + Z^T B^T \\ * & \Theta_{22} & U_3 & 0 & 0 & XA_1^T \\ * & * & -2U_3 & U_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2U_3 & U_3 & XA_2^T \\ * & * & * & * & -U_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Theta_{66} \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ

$$\Theta_{11} = XA_0^T + Z^T B^T + A_0 X + BZ - \alpha X + Y_1 + Y_2 - U_1 - U_2,$$
$$\Theta_{12} = A_1 X + U_1, \qquad \Theta_{22} = -\left(Y_1 + U_1 + U_3\right),$$
$$\Theta_{66} = \tau^2 U_1 + h_2^2 U_2 + \left(h_2 - \tau\right)^2 U_3 - 2X$$

หรือ กรณี $h_2 < \tau$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & U_1 & A_2 X & 0 & XA_0^T + Z^T B^T \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & U_3 & XA_1^T \\ * & * & -U_3 & U_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2U_3 & U_3 & XA_2^T \\ * & * & * & * & -2U_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66} \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ

$$\Xi_{11} = XA_0^T + Z^T B^T + A_0 X + BZ - \alpha X + Y_1 + Y_2 - U_1 - U_2,$$
$$\Xi_{12} = A_1 X + U_2, \qquad \Xi_{22} = -2\left(Y_2 + U_2 + U_3\right),$$
$$\Xi_{66} = h_1^2 U_1 + \tau^2 U_2 + \left(\tau - h_1\right)^2 U_3 - 2X$$

หรือ กรณี $h_1 < \tau < h_2$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & A_1 X & U_1 & \Gamma_{14} & U_2 & XA_0^T + Z^T B^T \\ * & -2U_3 & U_3 & -XA_1^T & U_3 & XA_1^T \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2A_2 X & 0 & \Gamma_{46} \\ * & * & * & * & \Gamma_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66} \end{bmatrix} < 0,$$

เมื่อ

$$\Gamma_{11} = XA_0^T + Z^T B^T + A_0 X + BZ - \alpha X + Y_1 + Y_2 - U_1 - U_2,$$
$$\Gamma_{14} = A_2 X - XA_0^T - Z^T B^T, \qquad \Gamma_{33} = -\left(Y_1 + U_1 + U_3\right),$$
$$\Gamma_{46} = XA_2^T + X, \qquad \Gamma_{55} = -\left(Y_2 + U_2 + U_3\right),$$
$$\Gamma_{66} = h_1^2 U_1 + h_2^2 U_2 + \left(h_2 - h_1\right)^2 U_3 - 2X$$

และ

$$c_1 e^{\alpha T} \lambda_{\max}\left(X\right) \left[\frac{1}{\lambda_{\min}\left(X\right)} + \frac{d_1}{\lambda_{\min}\left(XY_1^{-1}X\right)} + \frac{d_2}{\lambda_{\min}\left(XY_2^{-1}X\right)} \right.$$

$$+\frac{d_1^{\,2}}{\lambda_{\min}\left(XU_1^{-1}X\right)}+\frac{d_2^{\,2}}{\lambda_{\min}\left(XU_2^{-1}X\right)}+\frac{\left(d_2-d_1\right)^2}{\lambda_{\min}\left(XU_3^{-1}X\right)}\Bigg]<c_2$$

เมื่อตัวควบคุมกำหนดโดย $K = ZX^{-1}$

อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาเงื่อนไขสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่ไม่มีตัวควบคุม และเงื่อนไขสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่มีตัวควบคุม โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ซึ่งรูปแบบการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อีกรูปแบบหนึ่ง

ในการหาเงื่อนไขได้ทำการแยกกรณีออกเป็น 3 กรณี คือ $\tau < h_1$ $h_2 < \tau$ และ $h_1 < \tau < h_2$ ซึ่งเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่จะทำให้หาเงื่อนไขสำหรับวิเคราะห์เสถียรภาพได้

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

สามารถนำเงื่อนไขสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงที่ไม่มีตัวควบคุมและมีตัวควบคุม มาประยุกต์ใช้หาเงื่อนไขสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาแบบช่วงที่ไม่มีตัวควบคุมและมีตัวควบคุมได้ และเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่นที่คล้ายกัน

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

ควรมีตัวอย่างเชิงตัวเลขที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์ เพื่อแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีที่ได้พิสูจน์นั้นสามารถประยุกต์ใช้ได้จริง

เอกสารอ้างอิง

Amato, F. & Ariola, M. (2005). Finite-time control of discrete-time linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control, 50**, 724-729.

Barnett, S. & Cameron, R.G. (1985). **Introduction to Mathematical Control Theory**. Oxford Clarendon.

Debeljkovic, D. L., Stojanovic, S. B. & Jovanovic, A. M. (2013). Finite-time stability of continuous time delay systems: Lyapunov-like approach with Jensen's and Coppel's inequality. **Acta Polytechnica Hungarica, 10**(7), 135-150.

Garcia, G., Tarbouriech, S. & Bernussou, J. (2009). Finite-time stabilization of linear time varying continuous systems. **IEEE Transactions on Automatic Control, 54**(2), 364–369.

Moulay, E., Dambrine, Yeganefar, M., N. & Perruquetti, W. (2008). Finite-time stability and stabilization of time-delay systems. **System Control Letters, 57**(7), 561-566.

Rojsiraphisal, T. & Puangmalai, J. (2014). An Improved Finite-time stability and stabilization of linear system with constant delay, **Mathematical Problem in Engineering**, **2014**, Article ID 154769, 7 pages.

Shen, Y., Yu, H. & Jian, J. (2008). Finite-time control for a class of discrete-time systems with time delay. **Proceedings of the 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics** (pp.1-6). China: Shenzhen.

Stojanovic, S. B., Debeljkovic, D. L. & Antic, D. S. (2012). Finite-time stability and stabilization of linear time-delay systems. **Facta Universitatis. Serie Automatic Control and Robotics, 11**(1), 25-36.

Zhang, Z., Zhang, Z., Zhang, H., Zheng, B. & H. Karimic, R. (2014). Finite-time stability analysis and stabilization for linear discrete-time system with time-varying delay. **Journal of the Franklin Institute**, **351**. 3457–3476.