

การวิเคราะห์เสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการเชิงอนุพันธ์

แบบนิพจน์ที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

Exponential Stability of a Certain Neutral Differential

Equation with Time - Varying Delays

สุภัชญา อนุสรณ์ประดิษฐ์¹ จิรพงศ์ พวงมาลัย² และ วันวิสา พวงมาลัย^{3*}

¹โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

²โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

³โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

E-mail: ¹spam.py93@gmail.com, ²puangmalai.j@gmail.com, ^{3*}rakpuang.wan@gmail.com

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้แสดงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิพจน์ที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาในรูปแบบสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยการปรับปรุงสมการอินทิกรัล และใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คาซอฟสกี เพื่อหาเงื่อนไขที่เพียงพอและแสดงการเปรียบเทียบเงื่อนไขการมีเสถียรภาพ

คำสำคัญ: เสถียรภาพเลขชี้กำลัง สมการเชิงอนุพันธ์แบบนิพจน์ ตัวหน่วงเชิงเวลา ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คาซอฟสกี

Abstract

In this paper, the exponential stability conditions for neutral differential equations with time-varying delays are presented. By improving the integral inequality, Lyapunov–Krasovskii functional. And determine sufficient conditions and show a comparison of conditions.

Keywords: Exponential Stability, Neutral Differential Equations, Time-varying Delays, Lipunov-Kasovsky Functions

* Corresponding author, e-mail: rakpuang.wan@gmail.com

1. บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทอล (NDE : Neutral Differential Equations) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ประเภทหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับตัวห้วงเชิงเวลาในรูปอนุพันธ์ มักปรากฏในทางวิทยาศาสตร์และสาขาวิศวกรรม เช่น อากาศยาน กระบวนการทางเคมี ระบบควบคุม และชีววิทยา ที่แสดงไว้ในงานวิจัยของ Liao และคณะ ในปี ค.ศ. 2009 [1] และเป็นที่ทราบกันดีว่าการเปลี่ยนแปลงของตัวห้วงเพียงเล็กน้อยอาจทำให้ระบบเกิดความไม่เสถียรขึ้น ที่แสดงไว้ในงานวิจัยของ Park ในปี ค.ศ. 2005 [2] ดังนั้นนักวิจัยจึงเพิ่มความสนใจในการศึกษานี้ โดยการปรับปรุงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของสมการเชิงอนุพันธ์แบบ นิวทอลเพื่อให้สามารถใช้ตัวห้วงเชิงเวลาที่ไม่ต่อเนื่องได้ ซึ่งเงื่อนไขดังกล่าวอยู่ในรูปแบบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMI : Linear Matrix Inequality)

ในปี ค.ศ. 2012 Chen [3] ได้แสดงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทอล ในรูปแบบ

$$\frac{d}{dt}[x(t) + px(t - \tau)] = -ax(t) + b \tanh x(t - \sigma)$$

ในปี ค.ศ. 2014 Keadnarmol และคณะ [4] ได้แสดงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทอล ในรูปแบบ

$$\dot{D} = \frac{d}{dt}[x(t) + px(t - \tau(t))] = -ax(t) + b \tanh x(t - \sigma(t))$$

ในปี ค.ศ. 2019 Janejira และคณะ [5] ได้แสดงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทอล ในรูปแบบ

$$\frac{d}{dt}[x(t) + px(t - \tau(t))] + ax(t) - b \tanh x(t - \sigma(t)) = 0$$

ในงานวิจัยนี้แสดงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทอลกับตัวห้วงเชิงเวลาในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยการปรับปรุงอสมการอินทิกรัล ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คาซอฟสกี (Lyapunov-Krasovskii-like functional) เพื่อกำหนดเงื่อนไขที่เพียงพอและแสดงการเปรียบเทียบเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของสมการ โดยกำหนดให้ $\|\cdot\|$ คือ นอร์มแบบยูคลิด (Euclidean norm) ของเวกเตอร์หรือเมทริกซ์ กำหนดโดย

$$\|x(s)\|_s = \sup_{-r \leq s \leq 0} |x(s)| \text{ และ } \|\dot{x}(s)\|_l = \sup_{-r \leq s \leq 0} |\dot{x}(s)|$$

2. ความรู้พื้นฐาน

ต่อไปจะแสดงความรู้พื้นฐานในการหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทอลที่มีตัวห้วงเชิงเวลา ดังนี้

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทอลที่มีตัวห้วงเชิงเวลา

$$\dot{D} = \frac{d}{dt}[x(t) + px(t - \tau(t))] = -ax(t) + b \tanh x(t - \sigma(t)) \quad (2.1)$$

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงบวก $|p| < 1$ และ $\tau(t), \sigma(t)$ เป็นฟังก์ชันตัวห่วงเชิงเวลาที่มีขอบเขต
กับ $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma(t) \leq \sigma_2$ และ $0 \leq \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$

บทตั้ง 2.1 (อสมการโคชี) สำหรับเมทริกซ์สมมาตรเชิงบวก $N \in R^{n \times n}$ และ $x, y \in R^n$ จะได้ว่า

$$\pm 2x^T y \leq x^T N x + y^T N^{-1} y$$

บทนิยาม 2.2 ให้ K และ λ เป็นจำนวนจริงบวก ที่ซึ่ง

$$||x(t)|| \leq K e^{-\lambda t} \sup_{-r \leq s \leq 0} ||x(s)|| = K e^{-\lambda t} ||x_0||_s$$

$$\text{สำหรับ } ||x_t||_s = \sup_{-r \leq s \leq 0} ||x(t+s)||$$

$$\text{แล้วสมการ } \dot{D} = \frac{d}{dt} [x(t) + p x(t - \tau(t))] = -a x(t) + b \tanh x(t - \sigma(t))$$

มีเสถียรภาพของเลขชี้กำลัง ที่จุดสมดุล $x = 0$

ทฤษฎีบท 2.3 [4] ให้ $M > 0, \mu > 0, |p| < 1$ และ $0 \leq \tau(t) \leq \tau$ ถ้า $x: [-\tau, \infty) \rightarrow R$
สอดคล้องกับ

$$|x(t)| \leq \sup_{s \in [-\tau, 0]} |x(s)| = |x_0|_s, t \in [-\tau, 0] \text{ และ } |x(t)| \leq |p| |x(t - \tau(t))| +$$

$$M e^{-\mu t}, t \geq 0$$

$$\text{จะมีค่าคงที่ } \epsilon > 0, m \in \left[0, \frac{-\ln|p|}{\tau}\right] \text{ ที่ซึ่ง } |p| e^{\epsilon \tau} < 1$$

$$\text{แล้ว } |x(t)| \leq |x_0|_s e^{-mt} + \frac{M}{1 - |p| e^{\epsilon \tau}} \leq N e^{-\varphi t}, \geq 0$$

$$\text{เมื่อ } N \equiv |x_0|_s + \frac{M}{1 - |p| e^{\epsilon \tau}} \text{ และ } \varphi = \min\{m, \epsilon\}$$

ทฤษฎีบท 2.4 ทฤษฎีบทไลบ์นิตซ์ (Leibnitz's theorem) ให้ $\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(t, \alpha) dt$ โดยที่
 $a \leq \alpha \leq b$ ถ้า $f(t, \alpha)$ และ $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณของระนาบ $t\alpha$ ซึ่ง $u \leq t \leq v$ ถ้าให้ u
และ v เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องสำหรับ $a \leq \alpha \leq b$ แล้ว

$$\frac{\partial \phi(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(t, \alpha) dt = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dt + f(v, \alpha) \frac{dv}{d\alpha} - f(u, \alpha) \frac{du}{d\alpha}$$

ต่อไปจะแสดงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทรอลที่มีตัวห่วง
เชิงเวลาในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

3. ผลการวิจัย

ก่อนที่จะแสดงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทรอลที่มีตัวห่วง
เชิงเวลาจะแสดงการปรับปรุงอสมการอินทิกรัล ดังนี้

บทตั้ง 3.1 สำหรับ $\tau_1, \tau_2 > \tau_1, k$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $\dot{x}: [-\tau_2, \infty) \rightarrow R$ แล้ว

$$-\int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{\gamma(s-t)} \dot{x}^2(s) ds \leq \varepsilon \xi^2(t) + 2\xi(t)[(x(t - \tau_1)) - (x(t - \tau_2))]$$

เมื่อ $\varepsilon = \frac{1}{k}(e^{k\tau_2} - e^{k\tau_1})$ และ $\xi(t)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่สามารถเลือกได้อย่างเหมาะสม

พิสูจน์ พิจารณาอสมการ

$$0 \leq \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{-k(s-t)} [\xi(t) + e^{k(s-t)} \dot{x}(s)]^2 ds$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{-k(s-t)} [\xi(t) + e^{k(s-t)} \dot{x}(s)]^2 ds \\ &= \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} [e^{-k(s-t)} \xi^2(t) + 2\xi(t)\dot{x}(s) + e^{k(s-t)} \dot{x}^2(s)] ds \\ &= \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{-k(s-t)} \xi^2(t) ds + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} 2\xi(t)\dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{k(s-t)} \dot{x}^2(s) ds \\ &= \xi^2(t) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{-k(s-t)} ds + 2\xi(t) \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{k(s-t)} \dot{x}^2(s) ds \\ &= \xi^2(t) \left[\frac{e^{k\tau_2} - e^{k\tau_1}}{k} \right] + 2\xi(t)[x(t-\tau_1) - x(t-\tau_2)] \\ &\quad + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{k(s-t)} \dot{x}^2(s) ds \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \varepsilon = \frac{1}{k}(e^{k\tau_2} - e^{k\tau_1})$$

ดังนั้น

$$- \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{k(s-t)} \dot{x}^2(s) ds \leq \varepsilon \xi^2(t) + 2\xi(t)[(x(t-\tau_1)) - (x(t-\tau_2))]$$

ต่อไปจะแสดงเงื่อนไขการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, k$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $|p| < 1$ ถ้ามี $\alpha_i, \beta_i, \eta_1, \eta_2, \eta_3$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ ที่เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว (2.1) มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง ที่ซึ่ง $\omega < 0$

$$\text{เมื่อ } \omega_{1,1} = 4kq_1e^{2kt} - 2q_2e^{2kt}, \omega_{1,2} = -2aq_1e^{2kt} + 2q_2e^{2kt} - 2q_3e^{2kt} - 2q_4e^{2kt},$$

$$\omega_{1,3} = 2pq_2e^{2kt} + 2q_3e^{2kt}, \omega_{1,9} = 2q_1be^{2kt}, \omega_{1,11} = 2q_3e^{2kt},$$

$$\omega_{2,2} = 2q_4e^{2kt} - 2q_5e^{2kt} - 2q_6e^{2kt} + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_4\sigma_1^2 + \beta_5\sigma_2^2 + \beta_6\sigma_{21}^2 + \beta_1 + \beta_2$$

$$+ 4k\gamma e^{2kt} - 2a\gamma e^{2kt} + b^2\gamma e^{2kt} + (ap)^2\gamma e^{2kt} + 3\alpha_4\tau_1\varepsilon_1 + 3\alpha_5\tau_2\varepsilon_2,$$

$$\omega_{2,3} = -6\alpha_4\tau_1\varepsilon_1, \omega_{2,4} = 2pq_4e^{2kt} + 2q_5e^{2kt} + 4q_6e^{2kt}, \omega_{2,5} = -6\alpha_5\tau_2\varepsilon_2,$$

$$\omega_{2,6} = -2\eta_1a, \omega_{2,7} = -2\eta_2a, \omega_{2,9} = 2\eta_3a, \omega_{2,11} = 4q_6e^{2kt},$$

$$\omega_{3,3} = \alpha_3e^{-2k\tau_1} - \alpha_1e^{-2k\tau_1} + 3\alpha_4\tau_1\varepsilon_1 + 3\alpha_6\tau_{21}\varepsilon_3, \omega_{3,5} = -6\alpha_6\tau_{21}\varepsilon_3,$$

$$\omega_{4,4} = -2q_6e^{2kt} - (pb)^2\gamma e^{2kt} - 2\gamma e^{2kt}, \omega_{4,11} = -4q_6e^{2kt},$$

$$\omega_{5,5} = -\alpha_2e^{-2k\tau_2} - \alpha_3e^{-2k\tau_2} + 3\alpha_5\tau_2\varepsilon_2 + 3\alpha_6\tau_{21}\varepsilon_3,$$

$$\omega_{6,6} = \alpha_4\tau_1^2 + \alpha_5\tau_2^2 + \alpha_6\tau_{21}^2 - 2\eta_1, \omega_{6,7} = -2\eta_1p - 2\eta_2, \omega_{6,9} = 2\eta_1b + 2\eta_3,$$

$$\omega_{7,7} = -2\eta_1p, \omega_{7,9} = 2\eta_2b + 2\eta_3p, \omega_{8,8} = \beta_3e^{-2k\sigma_1} - \beta_1e^{-2k\sigma_1},$$

$$\omega_{9,9} = 2\gamma e^{2kt} - 2\eta_3b, \omega_{10,10} = -\beta_3e^{-2k\sigma_2} - \beta_2e^{-2k\sigma_2}, \omega_{11,11} = -2q_6e^{2kt},$$

$$\omega_{12,12} = -\beta_4\sigma_1e^{-2k\sigma_1}, \omega_{13,13} = -\beta_5\sigma_2e^{-2k\sigma_2}, \omega_{14,14} = -\beta_6\sigma_{21}e^{-2k\sigma_{21}}$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชันไลปูนอฟ - คราซอฟสกี ต่อไปนี้

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t) + V_6(t)$$

$$\text{เมื่อ } V_1(t) = q_1 e^{2kt} D^2$$

$$V_2(t) = \alpha_1 \int_{t-\tau_1}^t e^{2k(s-t)} x^2(s) ds + \alpha_2 \int_{t-\tau_2}^t e^{2k(s-t)} x^2(s) ds + \alpha_3 \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} e^{2k(s-t)} x^2(s) ds$$

$$V_3(t) = \beta_1 \int_{t-\sigma_1}^t e^{2k(s-t)} \tanh^2 x(s) ds + \beta_2 \int_{t-\sigma_2}^t e^{2k(s-t)} \tanh^2 x(s) ds \\ + \beta_3 \int_{-\sigma_2}^{-\sigma_1} e^{2k(s-t)} \tanh^2 x(s) ds$$

$$V_4(t) = \alpha_4 \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2k(s-t)} \dot{x}^2(s) ds d\theta + \alpha_5 \tau_2 \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2k(s-t)} \dot{x}^2(s) ds d\theta \\ + \alpha_6 \tau_{21} \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+\theta}^t e^{2k(s-t)} \dot{x}^2(s) ds d\theta$$

$$V_5(t) = \beta_4 \sigma_1 \int_{-\sigma_1}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2k(s-t)} \tanh^2 x(s) ds d\theta + \beta_5 \sigma_2 \int_{-\sigma_2}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2k(s-t)} \tanh^2 x(s) ds d\theta \\ + \beta_6 \sigma_{21} \int_{-\sigma_2}^{-\sigma_1} \int_{t+\theta}^t e^{2k(s-t)} \tanh^2 x(s) ds d\theta$$

$$V_6(t) = \gamma e^{2kt} D^2$$

$$\text{โดยที่ } D = x(t) + px(t - \tau(t)) \text{ และ } \dot{D} = \frac{d}{dt} [x(t) + px(t - \tau(t))]$$

ดำเนินการหา $\dot{V}(t)$ จะได้ว่า

$$\dot{V}_1(t) = (4kq_1 e^{2kt} - 2q_2 e^{2kt}) D^2 + (-2aq_1 + 2q_2 - 2q_3 - 2q_4) e^{2kt} x(t) D \\ + (2q_4 - 2q_5 - 2q_6) e^{2kt} x^2(t) + 2q_1 b e^{2kt} \tanh x(t - \sigma(t)) D \\ + (2pq_2 + 2q_3) e^{2kt} D x(t - \tau(t)) + (2pq_4 + 2q_5 + 4q_6) e^{2kt} x(t - \tau(t)) x(t) \\ + 2q_3 e^{2kt} D \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds + (2q_5 + 4q_6) e^{2kt} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds x(t) \\ - 2q_6 e^{2kt} x^2(t - \tau(t)) - 4q_6 e^{2kt} x(t - \tau(t)) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ - e^{2kt} 2q_6 \left(\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \right)^2 - 2kV_1(t) \quad (3.1)$$

โดยทฤษฎีบท 2.4. จะได้ว่า

$$\dot{V}_2(t) = (\alpha_1 + \alpha_2) x^2(t) + (\alpha_3 - \alpha_1) e^{-2k\tau_1} x^2(t - \tau_1) - (\alpha_2 + \alpha_3) e^{-2k\tau_2} x^2(t - \tau_2) \\ - 2kV_2(t) \quad (3.2)$$

$$\dot{V}_3(t) = (\beta_1 + \beta_2) \tanh^2 x(t) + (\beta_3 - \beta_1) e^{-2k\sigma_1} \tanh^2 x(t - \sigma_1) \\ - (\beta_2 + \beta_3) e^{-2k\sigma_2} \tanh^2 x(t - \sigma_2) - 2kV_3(t) \quad (3.3)$$

โดยทฤษฎีบท 2.4. บทตั้ง 3.1. และ $\tanh^2 x(t) \leq x^2(t)$ จะได้ว่า

$$\dot{V}_4(t) \leq (\alpha_4 \tau_1^2 + \alpha_5 \tau_2^2 + \alpha_6 \tau_{21}^2) \dot{x}^2(t) + (3\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1 + 3\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2) x^2(t) \\ - (6\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1) x(t) x(t - \tau_1) - (6\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2) x(t) x(t - \tau_2) \\ + (3\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1 + 3\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3) x^2(t - \tau_1) + (3\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2 + 3\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3) x^2(t - \tau_2) \\ - (6\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) - 2kV_4(t) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) &\leq \beta_4 \sigma_1^2 x^2(t) - \beta_4 \sigma_1 e^{-2k\sigma_1} \left(\int_{t-\sigma_1}^t \tanh x(s) ds \right)^2 - \beta_5 \sigma_2 e^{-2k\sigma_2} \left(\int_{t-\sigma_2}^t \tanh x(s) ds \right)^2 \\ &+ \beta_5 \sigma_2^2 x^2(t) + \beta_6 \sigma_{21}^2 x^2(t) - \beta_6 \sigma_{21} e^{-2k\sigma_{21}} \left(\int_{t-\sigma_{21}}^{t-\sigma_1} \tanh x(s) ds \right)^2 - 2kV_5(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

และ

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(t) &= (4k\gamma e^{2kt} - 2a\gamma e^{2kt} + |b|^2 \gamma e^{2kt} + |ap|^2 \gamma e^{2kt}) x^2(t) + 2\gamma e^{2kt} \tanh^2 x(t - \sigma(t)) \\ &+ (|pb|^2 \gamma e^{2kt} + 2\gamma e^{2kt}) x^2(t - \tau(t)) - 2kV_6(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

นำ (3.1) – (3.6) รวมกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + 2kV(t) &\leq D(4kq_1 e^{2kt} - 2q_2 e^{2kt})D \\ &+ D(-2aq_1 e^{2kt} + 2q_2 e^{2kt} - 2q_3 e^{2kt} - 2q_4 e^{2kt})x(t) \\ &+ D(2pq_2 e^{2kt} + 2q_3 e^{2kt})x(t - \tau(t)) + D2q_1 b e^{2kt} \tanh x(t - \sigma(t)) \\ &+ D2q_3 e^{2kt} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds x(t) + 2q_4 e^{2kt} - 2q_5 e^{2kt} - 2q_6 e^{2kt} \\ &+ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_4 \sigma_1^2 + \beta_5 \sigma_2^2 + \beta_6 \sigma_{21}^2 + 4k\gamma e^{2kt} - 2a\gamma e^{2kt} + b^2 \gamma e^{2kt} \\ &+ (ap)^2 \gamma e^{2kt} + 3\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1 + 3\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2 x(t) - x(t)(6\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1)x(t - \tau_1) \\ &+ x(t)(2pq_4 e^{2kt} + 2q_5 e^{2kt} + 4q_6 e^{2kt})x(t - \tau(t)) \\ &- x(t)(6\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2)x(t - \tau_2) + x(t)(2pq_5 e^{2kt} + 4q_6 e^{2kt}) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &+ x(t - \tau_1)(\alpha_3 e^{-2k\tau_1} - \alpha_1 e^{-2k\tau_1} + 3\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1 + 3\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3)x(t - \tau_1) - x(t - \tau_1)(6\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3)x(t - \tau_2) \\ &- x(t - \tau(t))(2q_6 e^{2kt} + (pb)^2 \gamma e^{2kt} + 2\gamma e^{2kt})x(t - \tau(t)) \\ &- x(t - \tau(t))(4q_6 e^{2kt}) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &+ x(t - \tau_2)(-\alpha_2 e^{-2k\tau_2} - \alpha_3 e^{-2k\tau_2} + 3\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2 + 3\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3)x(t - \tau_2) \\ &+ \dot{x}(t)(\alpha_4 \tau_1^2 + \alpha_5 \tau_2^2 + \alpha_6 \tau_{21}^2)\dot{x}(t) + \tanh x(t) (\beta_1 + \beta_2) \tanh x(t) \\ &+ \tanh x(t - \sigma_1) (\beta_3 e^{-2k\sigma_1} - \beta_1 e^{-2k\sigma_1}) \tanh x(t - \sigma_1) \\ &+ \tanh x(t - \sigma(t)) (2\gamma e^{2kt}) \tanh x(t - \sigma(t)) \\ &- \tanh x(t - \sigma_2) (\beta_3 e^{-2k\sigma_2} + \beta_2 e^{-2k\sigma_2}) \tanh x(t - \sigma_2) \\ &- \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds (2q_6 e^{2kt}) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t-\sigma_1}^t \tanh x(s) ds (\beta_4 \sigma_1 e^{-2k\sigma_1}) \int_{t-\sigma_1}^t \tanh x(s) ds \\ &- \int_{t-\sigma_2}^t \tanh x(s) ds (\beta_5 \sigma_2 e^{-2k\sigma_2}) \int_{t-\sigma_2}^t \tanh x(s) ds \\ &- \int_{t-\sigma_2}^{t-\sigma_1} \tanh x(s) ds (\beta_6 \sigma_{21} e^{-2k\sigma_{21}}) \int_{t-\sigma_2}^{t-\sigma_1} \tanh x(s) ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

นำ $-2\eta_1 \dot{x}(t)$, $-2\eta_2 \dot{x}(t - \tau(t))$ และ $2\eta_3 \dot{x}(t) \tanh x(t - \sigma(t))$ คูณตลอดสมการ (2.1) จะได้

$$-2\eta_1 \dot{x}^2(t) - 2\eta_1 p \dot{x}(t) \dot{x}(t - \tau(t)) - 2\eta_1 a x(t) \dot{x}(t) + 2\eta_1 b \dot{x}(t) \tanh x(t - \sigma(t)) = 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &-2\eta_2 \dot{x}(t) \dot{x}(t - \tau(t)) - 2\eta_2 p \dot{x}^2(t - \tau(t)) - 2\eta_2 a x(t) \dot{x}(t - \tau(t)) \\ &+ 2\eta_2 b \dot{x}(t - \tau(t)) \tanh x(t - \sigma(t)) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$2\eta_3 \dot{x}(t) \tanh x(t - \sigma(t)) + 2\eta_3 p \dot{x}(t - \tau(t)) \tanh x(t - \sigma(t)) + 2\eta_3 a x(t) \tanh x(t - \sigma(t)) - 2\eta_3 b \dot{x}(t) \tanh^2 x(t - \sigma(t)) = 0 \quad (3.10)$$

นำสมการ (3.8) – (3.10) บวกเข้าทางด้านขวาของสมการ (3.7) จะได้ว่า $\dot{V}(t) + 2kV(t) \leq$

$$\begin{aligned} & D(4kq_1 e^{2kt} - 2q_2 e^{2kt})D \\ & + D(-2aq_1 e^{2kt} + 2q_2 e^{2kt} - 2q_3 e^{2kt} - 2q_4 e^{2kt})x(t) \\ & + D(2pq_2 e^{2kt} + 2q_3 e^{2kt})x(t - \tau(t)) + 2Dq_1 b e^{2kt} \tanh x(t - \sigma(t)) \\ & + 2Dq_3 e^{2kt} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds + x(t)[2q_4 e^{2kt} - 2q_5 e^{2kt} - 2q_6 e^{2kt} + \alpha_1 \\ & + \alpha_2 + \beta_4 \sigma_1^2 + \beta_5 \sigma_2^2 + \beta_6 \sigma_{21}^2 + \beta_1 + \beta_2 + 4k\gamma e^{2kt} - 2a\gamma e^{2kt} + b^2 \gamma e^{2kt} \\ & + (ap)^2 \gamma e^{2kt} + 3\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1 + 3\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2] x(t) - x(t)(6\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1)x(t - \tau_1) \\ & + x(t)(2pq_4 e^{2kt} + 2q_5 e^{2kt} + 4q_6 e^{2kt})x(t - \tau(t)) \\ & - x(t)(6\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2)x(t - \tau_2) - x(t)(2\eta_1 a)\dot{x}(t) - x(t)(2\eta_2 a)\dot{x}(t - \tau_2) \\ & + x(t)(2\eta_3 a) \tanh x(t - \sigma(t)) \\ & + x(t - \tau_1)(\alpha_3 e^{-2k\tau_1} - \alpha_1 e^{-2k\tau_1} + 3\alpha_4 \tau_1 \varepsilon_1 + 3\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3)x(t - \tau_1) \\ & - x(t - \tau_1)(6\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3)x(t - \tau_2) + x(t)(4q_6 e^{2kt}) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ & - x(t - \tau(t))(2q_6 e^{2kt} + (pb)^2 \gamma e^{2kt} + 2\gamma e^{2kt})x(t - \tau(t)) \\ & - x(t - \tau(t))(4q_6 e^{2kt}) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ & + x(t - \tau_2)(-\alpha_2 e^{-2k\tau_2} - \alpha_3 e^{-2k\tau_2} + 3\alpha_5 \tau_2 \varepsilon_2 + 3\alpha_6 \tau_{21} \varepsilon_3)x(t - \tau_2) \\ & + \dot{x}(t)(\alpha_4 \tau_1^2 + \alpha_5 \tau_2^2 + \alpha_6 \tau_{21}^2 - 2\eta_1)\dot{x}(t) - \dot{x}(t)(2\eta_1 p + 2\eta_2)\dot{x}(t - \tau(t)) \\ & + \dot{x}(t)(2\eta_1 b + 2\eta_3) \tanh x(t - \sigma(t)) - \dot{x}(t - \tau(t))(2\eta_1 p)\dot{x}(t - \tau(t)) \\ & + \dot{x}(t - \tau(t))(2\eta_2 b + 2\eta_3 p) \tanh x(t - \sigma(t)) \\ & + \tanh x(t - \sigma_1)(\beta_3 e^{-2k\sigma_1} - \beta_1 e^{-2k\sigma_1}) \tanh x(t - \sigma_1) \\ & + \tanh x(t - \sigma(t))(2\gamma e^{2kt} - 2\eta_3 b) \tanh x(t - \sigma(t)) \\ & - \tanh x(t - \sigma_2)(\beta_3 e^{-2k\sigma_2} + \beta_2 e^{-2k\sigma_2}) \tanh x(t - \sigma_2) \\ & - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds (2q_6 e^{2kt}) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ & - \int_{t-\sigma_1}^t \tanh x(s) ds (\beta_4 \sigma_1 e^{-2k\sigma_1}) \int_{t-\sigma_1}^t \tanh x(s) ds \\ & - \int_{t-\sigma_2}^t \tanh x(s) ds (\beta_5 \sigma_2 e^{-2k\sigma_2}) \int_{t-\sigma_2}^t \tanh x(s) ds \\ & - \int_{t-\sigma_2}^{t-\sigma_1} \tanh x(s) ds (\beta_6 \sigma_{21} e^{-2k\sigma_{21}}) \int_{t-\sigma_2}^{t-\sigma_1} \tanh x(s) ds \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\dot{V}(t) + 2kV(t) \leq \xi^T(t) \omega \xi(t)$

เมื่อ $\xi^T(t) = [D, x(t), x(t - \tau(t)), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dot{x}(t), \dot{x}(t - \tau(t)), \tanh x(t - \sigma(t)), \tanh x(t - \sigma_1), \tanh x(t - \sigma_2), \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds, \int_{t-\sigma_1}^t \tanh x(s) ds, \int_{t-\sigma_2}^t \tanh x(s) ds, \int_{t-\sigma_2}^{t-\sigma_1} \tanh x(s) ds]$

จาก $\omega < 0$ จะได้ว่า $\xi^T(t)\omega\xi(t) < 0$

ดังนั้น $\dot{V}(t) + 2kV(t) < 0$ นั่นคือ $V(t)$ เป็นฟังก์ชันลด

จะได้ว่า $e^{2kt}V(t) \leq e^{2k(0)}V(0) = V(0)$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } V(0) &\leq [q_1(1 + |p|)^2 + \alpha_1 \int_{-\tau_1}^0 e^{2ks} ds + \alpha_2 \int_{-\tau_2}^0 e^{2ks} ds + \alpha_3 \int_{-\tau_3}^0 e^{2ks} ds \\ &+ \beta_1 \int_{-\sigma_1}^0 e^{2ks} ds + \beta_2 \int_{-\sigma_2}^0 e^{2ks} ds + \beta_3 \int_{-\sigma_3}^0 e^{2ks} ds \\ &+ \alpha_4 \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{\theta}^0 e^{2k(s)} ds d\theta + \alpha_5 \tau_2 \int_{-\tau_2}^0 \int_{\theta}^0 e^{2k(s)} ds d\theta \\ &+ \alpha_6 \tau_{21} \int_{-\tau_2}^0 \int_{\theta}^0 e^{2k(s)} ds d\theta + \beta_4 \sigma_1 \int_{-\sigma_1}^0 \int_{\theta}^0 e^{2k(s)} ds d\theta \\ &+ \beta_5 \sigma_2 \int_{-\sigma_2}^0 \int_{\theta}^0 e^{2k(s)} ds d\theta + \beta_6 \sigma_{21} \int_{-\sigma_2}^0 \int_{\theta}^0 e^{2k(s)} ds d\theta \\ &+ \gamma(1 + |p|)^2] \max\{|x|_s^2, |\dot{x}|_l^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } V(0) &\leq [q_1(1 + |p|)^2 + \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 + \alpha_3 \tau_{21} + \beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2 + \beta_3 \sigma_{21} + \\ &\alpha_4 \frac{\tau_1^3}{2} + \alpha_5 \frac{\tau_2^3}{2} + \alpha_6 \frac{\tau_{21}^3}{2} + \beta_4 \frac{\sigma_1^3}{2} + \beta_5 \frac{\sigma_2^3}{2} + \beta_6 \frac{\sigma_{21}^3}{2} + \gamma(1 + |p|)^2] \max\{|x|_s^2, |\dot{x}|_l^2\} \\ &= \Delta \max\{|x|_s^2, |\dot{x}|_l^2\} \\ &= \Delta M \end{aligned}$$

นั่นคือ $V(0) \leq \Delta M$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } \Delta &= [q_1(1 + |p|)^2 + \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 + \alpha_3 \tau_{21} + \beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2 + \beta_3 \sigma_{21} + \alpha_4 \frac{\tau_1^3}{2} + \\ &\alpha_5 \frac{\tau_2^3}{2} + \alpha_6 \frac{\tau_{21}^3}{2} + \beta_4 \frac{\sigma_1^3}{2} + \beta_5 \frac{\sigma_2^3}{2} + \beta_6 \frac{\sigma_{21}^3}{2} + \gamma(1 + |p|)^2], \quad M = \max\{|x|_s^2, |\dot{x}|_l^2\} \end{aligned}$$

จาก $e^{2kt}V(t) \leq V(t)$ และ $V_6(t) \leq e^{2kt}V(t); V_6(t) = \gamma e^{2kt}D^2$

จะได้ว่า $\gamma e^{2kt}D^2 \leq \Delta M$

พิจารณา $|\gamma e^{2kt}D^2| \leq |\Delta M|$ จะได้ว่า $|D| \leq ne^{-kt}; n = \sqrt{\frac{\Delta M}{\gamma}}$

จาก $D = x(t) + px(t - \tau(t))$ จะได้ว่า $x(t) = D - px(t - \tau(t))$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } |x(t)| &= |D - px(t - \tau(t))| \\ &\leq |D| + |px(t - \tau(t))| \\ &\leq ne^{-kt} + |p| |x(t - \tau(t))| \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $|x(t)| \leq |x_0|_s e^{-kt} + \frac{n}{1+|p|e^{\varepsilon t}} \leq Ne^{\varphi t}, t \geq 0$

เมื่อ $N \equiv |x_0|_s + \frac{n}{1-|p|e^{\varepsilon t}}, \varphi = \min\{k, \varepsilon\}$

นั่นคือ $|x(t)| \leq Ne^{-\varphi t}, t \geq 0$

จากนิยาม 2.2 จะได้ว่า สมการ (2.1) มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง

4. สรุปผล

จากทฤษฎีบท 3.2 ได้เงื่อนไขสำหรับการมีเสถียรภาพเลขชี้กำลังของสมการเชิงอนุพันธ์แบบนิวทรอลที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาที่มีจำนวนตัวแปรน้อยกว่าจำนวนตัวแปร ในเงื่อนไขงานวิจัยของ Janejira และคณะ และเงื่อนไขดังกล่าวยังสามารถใช้กับตัวหน่วงเชิงเวลาที่ไม่ต่อเนื่องได้ด้วย

5. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ผู้วิจัยต้องขอขอบคุณคุณคณาจารย์ โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่าง ๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Liao, X., Liu, Y., Guo, S., & Mai, H. (2009). Asymptotic stability of delayed neural networks: a descriptor system approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(7), 3120-3133.
- [2] Park, J. H. (2005). Delay-dependent criterion for guaranteed cost control of neutral delay systems. *Journal of optimization theory and applications*, 124, 491-502.
- [3] Chen, H. (2012). Some improved criteria on exponential stability of neutral differential equation. *Advances in Difference equations*, 2012, 1-9.
doi:10.1186/1687-1847-2012-170.
- [4] Keadnarmol, P., & Rojsiraphisal, T. (2014). Globally exponential stability of a certain neutral differential equation with time-varying delays. *Advances in Difference Equations*, 2014, 1-10.
- [5] Tranthi, J., Botmart, T., Weera, W., & Niamsup, P. (2019). A new approach for exponential stability criteria of new certain nonlinear neutral differential equations with mixed time-varying delays. *Mathematics*, 7(8), 737.