การมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ที่แตกต่างกัน

Finite Time Stability of Uncertain Linear Systems with Time-Varying Delays by Using Different Lyapunov-krasovskii

ดลยา อยู่กรัด[1] และวันวิสา พวงมาลัย[2]

Donlaya Yukrat[1] and Wanwisa Puangmalai[2]

[1]บัณฑิตสาขาวิชาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
[2]อาจารย์โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยนี้ได้นำเสนอการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาโดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่แตกต่างกัน โดยเงื่อนไขใหม่ที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดเกิดจากการพิสูจน์จากอสมการและอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นโดยใช้อสมการเวอร์ทิงเจอร์เป็นฐาน และเปรียบเทียบเงื่อนไขดังกล่าวกับงานวิจัยอื่นๆ

คำสำคัญ: อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น/ อสมการเวอทิงเจอร์/ ไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้/ การมีเสถียรภาพเวลาจำกัด

Abstract

In this paper, we present finite time stability of uncertain linear systems with time-varying delays by using different Lyapunov-krasovskii. The new sufficient finite-time stability conditions have been proposed in the forms of inequalities and linear matrix inequalities by using Wirtinger-based inequality. In addition, we compare conditions with other work.

Keywords: linear matrix inequalities (LMIs)/ Wirtinger inequality/ Lyapunov-krasovskii/ finite time stability

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ตัวหน่วงเชิงเวลา เป็นตัวหน่วงของสองเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น โดยเฉพาะเวลาที่ส่งข้อมูล วัตถุ หรือพลังงาน ตัวหน่วงเชิงเวลาจึงเป็นเรื่องทั่วไปในชีวิตประจำวัน ซึ่งจะปรากฏในระบบต่างๆ เช่น ระบบชีวภาพ ระบบนิเวศ ระบบเศรษฐกิจ ระบบสังคม ระบบวิศวกรรม ฯลฯ ตัวอย่างเช่น ในระบบเศรษฐกิจ ธนาคารกลางในต่างประเทศพยายามควบคุมเศรษฐกิจโดยการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย ซึ่งผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยอาจใช้เวลาหลายเดือนกว่าจะเกิดผลกระทบต่อเศรษฐกิจ อย่างไรก็ตามงานวิจัยจำนวนมากที่ตีพิมพ์ได้มุ่งเน้นไปที่เสถียรภาพของเส้นกำกับไลปูนอฟ ซึ่งถูกกำหนดในช่วงเวลาที่ไม่จำกัดซึ่งปัญหาเสถียรภาพของระบบตัวหน่วงเชิงเวลาได้รับความสนใจอย่างมากในช่วงหลายทศวรรษที่ผ่านมา เช่น ปัญหาของการควบคุมวิถีของยานอวกาศจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสุดท้ายในช่วงเวลาที่กำหนด การกำหนดขอบเขตเริ่มต้น ทำให้เกิดสภาวะที่ยังคงอยู่ในขอบเขตที่กำหนดไปยังจุดสุดท้ายภายใต้เวลาที่กำหนด สถานการณ์ข้างต้นเป็นที่ทราบกันทั่วไปว่ามีเสถียรภาพเวลาจำกัด (FTS)

ระบบที่มีความไม่แน่นอน จะเป็นระบบที่รองรับค่าไม่ทราบค่า จะสามารถทำให้ระบบทำงานได้หลากหลายมากขึ้น ซึ่งความไม่แน่นอนนั้นจะแทนเป็นเมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าแต่จะมีขอบเขต โดยมีบทความวิจัยที่เกี่ยวข้องในการดำเนินการวิจัย ดังนี้

ในปี ค.ศ. 2012 เอส บี สโตจาโนวิก และคณะ (Stojanovic, S.B., Debeljkovic, D.L. and Antic, D.S., 2012, pp.25-36) ได้ศึกษาการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดและขยายแนวคิดของการมีสเถียรภาพเวลาจำกัดไปยังระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) \text{ , } t > 0$$

เมื่อกำหนด $x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0]$

โดยที่ $x(t) \in R^n$ เป็นเวกเตอร์สถานะ เงื่อนไขเริ่มต้น $\phi(t)$ คือ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง ที่ $A_0 \in R^{n\times n}$ และ $A_1 \in R^{n\times n}$ เป็นเมทตริกซ์คงที่ที่รู้ค่า τ ค่าคงที่ของตัวหน่วงเชิงเวลา และสอดคล้องกับ

$$0 \le \tau \le \tau_M$$

โดย τ_M เป็นค่าคงที่ที่นักวิจัยใช้ระเบียบวิธีของ LMIs ใน 2 เงื่อนไขของฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ เพื่อให้ได้สภาพที่เพียงพอภายใต้ระบบเชิงเส้นด้วยตัวหน่วงเวลาคือเสถียรภาพของเวลาจำกัด

ในปี ค.ศ. 2014 ที โรจน์ศิรพิศาล และคณะ ((Rojsiraphisal T., Puangmalai J., 2014) ตรวจสอบการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาเป็นค่าคงที่ นักวิจัยมีการปรับปรุงงานวิจัยโดยเสนอเงื่อนไขเพียงพอที่ดีกว่าในรูปแบบของ LMIs โดยใช้ฟังก์ชั่นไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ 3 เงื่อนไข เพื่อเป็นเงื่อนไขในการมีเสถียรสภาพของเวลาจำกัด โดยจะเพิ่มเงื่อนไขในฟังก์ชั่นไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ในรูปแบบของอินทิกรัลสองชั้น

ในปี ค.ศ. 2015 เจ ซอง และคณะ ศึกษาปัญหาเสถียรภาพเวลาจำกัด สำหรับระบบเวลาต่อเนื่องที่ขึ้นอยู่กับตัวไม่ทราบค่ากับ ตัวหน่วงเชิงเวลา และการรบกวนของรูปแบบ

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0((t))x(t)) + (A_1 + \Delta A_1((t))x(t-\tau) + Ff[(x(t), x(t-\tau))] + Ew(t)$$

เมื่อกำหนด $x(t) = \phi(t), t \in [-\tau_m, 0]$

โดยที่ $x(t) \in \square^n$ คือ ปริภูมิเวกเตอร์ เริ่มต้นเงื่อนไข $\phi(t)$ คือ อนุพันธ์ต่อเนื่องของฟังก์ชันที่มีค่าเวกเตอร์ $A_0 \in \square^{n\times n}, A_1 \in \square^{n\times n}, F \in \square^{n\times n}, E \in \square^{n\times n}$ คือเมทริกซ์ค่าคงที่ที่มีมิติที่เหมาะสม และ f เป็นเงื่อนไขไม่เชิงเส้น สอดคล้องกับเงื่อนไข Lipschitz นักวิจัยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ 2 ตัว และประยุกต์ใช้เชอร์คอมพลีเมนต์ที่จะได้เงือนไขการมีเสถียรภาพเวลาจำกัด มาจาก LMIs

ในปี ค.ศ. 2015 ซี ซาง และคณะ (Zhang, Z., Zhang, Z. and Zhang, H., 2015, pp.1296-1317) ได้ศึกษาปัญหาของการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดสำหรับประเภทของระบบเวลาที่ต่อเนื่องกันกับความไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0(t))x(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))x(t-\tau(t))$$

เมื่อกำหนด $x(t) = \phi(t) \quad , \quad t \in [-\tau_M, 0]$

ตัวหน่วงเชิงเวลาสอดคล้องกับ

$$\tau_m \le \tau(t) \le \tau_M$$

นักวิจัยใช้เทคนิคการแบ่งสภาวะเชิงเวลา $x(t-\tau(t))$ เป็น 2 เงื่อนไข เงื่อนไขที่เพียงพอในรูปแบบของ LMIs สำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัด คือ การใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ 6 ตัว และอสมการของ Jensen

ในปี ค.ศ. 2016 เอส บี สโตจาโนวิก (Stojanovic, S.B., 2016, pp.926-938) ได้ศึกษาปัญหาของการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดสำหรับ 3 ระบบ กับตัวหน่วงเชิงเวลาต่อไปนี้

ระบบเชิงเส้นกับตัวหน่วงเชิงเวลา (Linear system with time-varying delay)

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau(t)) \quad , \quad t > 0 \tag{1}$$

เมื่อกำหนด $\quad x(t) = \phi(t) \quad , \quad t \in [-\tau_M, 0]$

ระบบตัวหน่วงเชิงเวลากับการรบกวนที่ไม่เชิงเส้น (Time varying delay system with nonlinear perturbations)

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t) \ , \ t > 0 \tag{2}$$

เมื่อกำหนด $\quad x(t) = \phi(t), t \in [-\tau_M, 0]$

ระบบตัวหน่วงเชิงเวลากับลักษณะพิเศษที่ไม่แน่นอน (Time varying delay system with parametric uncertainties)

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0(t))x(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))x(t-\tau(t)) \quad , \quad t > 0 \tag{3}$$

เมื่อกำหนด $\quad x(t) = \phi(t), t \in [-\tau_M, 0]$

ฟังก์ชันตัวหน่วงเชิงเวลา $\tau(t)$ สอดคล้องกับ

$$0 \le \tau_m \le \tau(t) \le \tau_M, \dot{\tau}(t) \le \mu < 1$$

โดยใช้อสมการใหม่กับฟังก์ชันเอกโพแนนเชียล และฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ 6 ตัว ที่มีฟังก์ชันเอกโพแนนเชียล และประยุกต์ใช้บทตั้งเชอร์คอมพลีเมนต์ (Schur complement lemma) เพื่อให้ได้เงื่อนไขของเสถียรภาพเวลาจำกัด มาจาก LMIs

โดยงานวิจัยนี้ ต้องการหาเงื่อนไขที่ทำให้ระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา มีเสถียรภาพเวลาจำกัดโดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่แตกต่างกัน 2 ฟังก์ชัน และเงื่อนไขใหม่ที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. หาเงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้มีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่ไม่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล
2. หาเงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้มีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการดำเนินการวิจัย จำเป็นต้องใช้ความรู้พื้นฐานของเสถียรภาพเวลาจำกัด อสมการเวิลด์ทิงเจอร์ เชอร์คอมพลีเมนต์ เพื่อนำไปใช้ในการหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นที่ไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา ดังนี้

บทนิยาม ระบบ $\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0(t))x(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))x(t-\tau(t))$ จะกล่าวว่ามีเสถียรภาพเวลาจำกัด พิจารณาโดย (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \le c_1 \le c_2$

$$\| \phi \|^2 \le c_1 \Rightarrow \| x(t) \|^2 < c_2 \quad , \forall t \in [0, T]$$

บทตั้ง อสมการเวิลด์ทิงเจอร์ (Wirtinger inequality) สำหรับเมทริกซ์สมมาตรของค่าคงที่ใด ๆ $R > 0$ ที่ซึ่งอนุพันธ์ของ $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

ถ้า $\zeta = \left[x^T(b) \quad x^T(a) \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b x^T(u)du \right]^T$ แล้ว $\int_a^b \dot{x}^T(u)R\dot{x}(u)du \ge \frac{1}{b-a}\zeta^T \begin{bmatrix} 4R & 2R & -6R \\ * & 4R & -6R \\ * & * & 12R \end{bmatrix} \zeta$

บทแทรก เชอร์คอมพลีเมนต์ (Schur complement lemma) ให้ X, Y, Z เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ โดยที่ $Y = Y^T > 0, X = X^T$ แล้ว $X + Z^T Y^{-1} Z < 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} X & Z^T \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0 \quad \textbf{หรือ} \quad \begin{bmatrix} -Y & Z \\ Z^T & X \end{bmatrix} < 0$$

ในการดำเนินการวิจัยจะนำเสนอเงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่แตกต่างกัน โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ การแสดงเงื่อนไขเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่ไม่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล และการแสดงเงื่อนเพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล ดังนี้

พิจารณาระบบไม่เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h(t)) + f(x(t), t) + g(x(t - h(t)), t) \; , t > 0$$

โดยที่ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^n$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ที่ทราบค่า และฟังก์ชันตัวหน่วงเชิงเวลา $h(t)$ สอดคล้องกับ

$$0 < h_1 < h(t) < h_2$$

โดยมีการพิจารณาค่าเริ่มต้น $x(t) = \phi(t)$ สำหรับ $t \in [-h_2, 0]$ เป็นฟังก์ชันค่าเริ่มต้นและสอดคล้องกับ

$$\| \phi \| := \sup_{t \in [-h_2, 0]} \left\{ \| \phi(t) \|, \| \dot{\phi}(t) \| \right\}$$

ในกรณี เมื่อ $f(x(t), t)$ และ $g(x(t - h(t)), t)$ อธิบายฟังก์ชันเวกเตอร์เชิงเส้น

$$f(x(t), t) = \Delta A_0(t) x(t), g(x(t - h(t)), t) = \Delta A_1(t) x(t - h(t)) \tag{4}$$

โดยที่ $\Delta A_0(t)$ และ $\Delta A_1(t)$ เป็นพาราเมทริกซ์ที่มีโครงสร้างไม่แน่นอน

จาก (2) และ (4) จะได้

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0(t)) x(t) + (A_1 + \Delta A_1(t)) x(t - h(t)) \tag{5}$$

ในทางปฏิบัติ $\Delta A_0(t)$ และ $\Delta A_1(t))$ สมมติเป็นขอบเขตดังนี้

$$[\Delta A_0(t) \quad \Delta A_1(t)] = G \Delta(t) [H \quad H_d] \tag{6}$$

โดยที่ G, H และ H_d เป็นเมทริกซ์ค่าจริงที่ทราบค่า และ $\Delta(t)$ เป็นฟังก์ชันเมทริกซ์ไม่แน่นอน ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\Delta^T(t) \Delta(t) \le I$$

จากสมการ (5) และ (6) จะได้

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h(t)) + G \Delta(t)(H x(t) + H_d x(t - h(t))$$

โดยกำหนด $z(t) = \Delta(t)(H x(t)) + H_d x(t - h(t))$

จะได้

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h(t)) + G z(t)$$

ต่อไปจะเป็นการหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่แตกต่างกัน ดังนี้

เสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟ สกี้ที่ไม่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล

ทฤษฎีบท 1 ระบบเชิงเส้นที่ไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่ไม่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล มีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \le c_1 < c_2$ ถ้ามีสเกลาร์บวก α และ P, Q_1, Q_2, R_1 และ $R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีค่าบวกแน่นอนและสเกลาร์บวก $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ ที่ซึ่ง

$$\beta_1 I < P < \beta_2 I, 0 < Q_1 < \beta_3 I, 0 < Q_2 < \beta_4 I, 0 < R_1 < \beta_5 I, 0 < R_2 < \beta_6 I,$$

และ

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{15} & \omega_{16} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 \end{bmatrix} < 0,$$

โดยที่ $\omega_{11} = -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T}$, $\omega_{12} = \beta_2 \sqrt{c_1}$, $\omega_{13} = \beta_3 \sqrt{c_1 h_1}$, $\omega_{14} = \beta_4 \sqrt{c_1 h_2}$,

$$\omega_{15} = \beta_5 \sqrt{c_1 \left(\frac{(h_1)^2}{2} \right)}, \omega_{16} = \beta_6 \sqrt{c_1 \left(\frac{(h_2)^2 - (h_1)^2}{2} \right)},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & 0 & \Psi_{15} & \Psi_{16} & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} & 0 & 0 & \Psi_{26} & 0 & \Psi_{28} \\ * & * & \Psi_{33} & \Psi_{34} & \Psi_{35} & 0 & \Psi_{37} & \Psi_{38} \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 & 0 & \Psi_{47} & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Psi_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Psi_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Psi_{88} \end{bmatrix} < 0,$$

และ $h_{21} = h_2 - h_1$

$$\Psi_{11} = [PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + A_0^T [h_1 R_1 + h_{21} R_2] A_0 - \alpha P - \frac{4R_1}{h_1} + H^T H$$

$$\Psi_{12} = -\frac{2R_1}{h_1}, \Psi_{13} = PA_1 + A_0^T [h_1 R_1 + h_{21} R_2] A_1 + H^T H_d$$

$$\Psi_{15} = PG + A_0^T [h_1 R_1 + h_{21} R_2] G, \Psi_{16} = \frac{6R_1}{h_1}$$

$$\Psi_{22} = -Q_1 - \frac{4R_1}{h_1} - \frac{4R_2}{h(t) - h_1}, \Psi_{23} = -\frac{2R_1}{h(t) - h_1}$$

$$\Psi_{26} = \frac{6R_1}{h_1}, \Psi_{28} = \frac{6R_2}{h(t) - h_1}$$

$$\Psi_{33} = A_1^T [h_1 R_1 + h_{21} R_2] A_1 - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)} - \frac{4R_2}{h(t) - h_1} + H_d^T H_d$$

$$\Psi_{34} = -\frac{2R_2}{h_2 - h(t)}, \Psi_{35} = A_1^T [h_1 R_1 + h_{21} R_2] G$$

$$\Psi_{37} = -\frac{2R_2}{h_2 - h(t)}, \Psi_{38} = \frac{6R_2}{h_2 - h(t)}, \Psi_{44} = -Q_2 - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)}$$

$$\Psi_{47} = \frac{6R_2}{h(t) - h_1}, \Psi_{55} = G^T [h_1 R_1 + h_{21} R_2] G - I$$

$$\Psi_{66} = -\frac{12R_1}{h_1}, \Psi_{77} = -\frac{12R_2}{h_2 - h(t)}, \Psi_{88} = -\frac{12R_2}{h(t) - h_1}$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ที่ไม่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล ต่อไปนี้

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^{5} V_i(x(t))$$

ที่ซึ่ง
$$V_1(x(t)) = x^T(t)Px(t),$$
$$V_2(x(t)) = \int_{t-h_1}^{t} x^T(s)Q_1x(s)ds$$
$$V_3(x(t)) = \int_{t-h_2}^{t} x^T(s)Q_2x(s)ds,$$
$$V_4(x(t)) = \int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds$$
$$V_5(x(t)) = \int_{-h_1}^{-h_2}\int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds$$

พิจารณาอนุพันธ์ของ $V(x(t))$ จะได้ว่า

$$\dot{V}_1(x(t)) = x^T(t)\left[PA_0 + A_0^TP - \alpha P\right]x(t) + 2x^T(t)PA_1x(t-h(t)) + 2x^T(t)PGz(t) + \alpha V_1(x(t))$$
$$\dot{V}_2(x(t)) = x^T(t)Q_1x(t) - x^T(t-h_1)Q_1x(t-h_1)$$
$$\dot{V}_3(x(t)) = x^T(t)Q_2x(t) - x^T(t-h_2)Q_2x(t-h_2)$$
$$\dot{V}_4(x(t)) = h_1\dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) - \int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du$$
$$\dot{V}_5(x(t)) = h_{21}\dot{x}^T(t)R_2\dot{x}(t) - \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds$$

พิจารณา $\dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t)$ เมื่อ $i = 1, 2$ จะได้

เนื่องจาก $\dot{x}^T(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h(t)) + Gz(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) &= \left[A_0x(t) + A_1x(t-h(t)) + Gz(t)\right]^T R_i\left[A_0x(t) + A_1x(t-h(t)) + Gz(t)\right] \\ &= x^T(t)A^TR_iA_0x(t) + 2x^T(t)A_0^TR_iA_1x(t-h(t)) \\ &\quad + 2x^T(t)A_0^TR_iGz(t) + x^T(t-h(t))A_1^TR_iA_1x(t-h(t)) \\ &\quad + 2x^T(t-h(t))A_1^TR_iGz(t) + z^T(t)G^TR_iGz(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) - \alpha V_1(x(t)) \le\ & x^T(t)[PA_0 + A_0^TP + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_0 - \alpha P]x(t) \\ & + 2x^T(t)[PA_1 + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1]x(t-h(t)) + 2x^T(t)[PG \\ & + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G]z(t) - x^T(t-h_1)Q_1x(t-h_1) \\ & - x^T(t-h_2)Q_2x(t-h_2) + x^T(t-h(t))[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1]x(t-h(t)) \\ & + 2x^T(t-h(t))[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G]z(t) + z^T(t)[G^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G]z(t) \\ & - \int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du - \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du \end{aligned}$$

ต่อไปพิจารณา $-\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du$ ดังนี้

$$-\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du = -\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du - \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du$$

กำหนดให้
$$\varpi_1(t)=\left[x^T(t)\quad x^T(t-h_1)\ \ \frac{1}{h_1}\int_{t-h_1}^{t}x^T(u)du\right]^T$$
$$\varpi_2(t)=\left[x^T(t-h(t))\ \ x^T(t-h_2)\ \ \frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x^T(u)du\right]^T$$
$$\varpi_3(t)=\left[x^T(t-h_1)\ \ x^T(t-h(t))\ \ \frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x^T(u)du\right]^T$$
และ
$$\eta(t)=\Big[x^T(t)\ \ x^T(t-h_1)\ \ x^T(t-h(t))\ \ x^T(t-h_2)\ \ z^T(t)\ \ \frac{1}{h_1}\int_{t-h_1}^{t}x^T(u)du$$
$$\frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x^T(u)du\quad \frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x^T(u)du\Big]^T$$

โดยบทตั้งอสมการเวิลด์ทิงเจอร์ (Wirtinger inequality) จะได้
$$-\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du\ \le -\frac{1}{h_1}\varpi_1^T(t)\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_1(t)$$
$$-\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du\le -\frac{1}{h_2-h(t)}\varpi_2^T(t)\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_2(t)$$
$$-\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}^T(u)R_2\dot{x}(u)du\le -\frac{1}{h(t)-h_1}\varpi_3^T(t)\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_3(t)$$
พิจารณา $z^T(t)z(t)$ จะได้
$$z^T(t)z(t)=\Big(\Delta(t)\big(Hx(t)+H_dx(t-h(t))\big)\Big)^T\Big(\Delta(t)\big(Hx(t)+H_dx(t-h(t))\big)\Big)$$
$$\le x^T(t)H^THx(t)+2x^T(t)H^TH_dx(t-h(t))+x^T(t-h(t))H_d^TH_dx(t-h(t))\quad (8)$$
จาก $V_1(x(t))\le V(x(t))$ จะได้ $\dot{V}(x(t))-\alpha V(x(t))\le\dot{V}(x(t))-\alpha V_1(x(t))$

จะได้ว่า $\dot{V}(x(t))-\alpha V(x(t))\le\eta^T(t)\Psi\eta(t)$ (9)

โดยที่ $\Psi<0$ จะได้ $\eta^T(t)\Psi\eta(t)<0$ (10)

ดังนั้น จากอสมการ (8) และ (9) จะได้ว่า
$$\dot{V}(x(t))-\alpha V(x(t))<0 \quad (11)$$
นำ $e^{-\alpha t}$ คูณในอสมการ (10) และอินทิเกรตจาก 0 ถึง t กับ $t\in[0,T]$ จะได้
$$e^{-\alpha t}V(x(t))<V(x(0))$$
และ $x^T(t)Px(t)=V_1(x(t))\le V(x(t))<e^{\alpha t}V(x(0))$

จากความสัมพันธ์ $\beta_1 I<P<\beta_2 I$ จะได้
$$\beta_1\|x(t)\|^2<e^{\alpha t}V(x(0)) \quad (12)$$

พิจารณา

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h_1}^{t} x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-h_2}^{t} x^T(s)Q_2x(s)ds$$
$$+\int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds + \int_{-h_1}^{-h_2}\int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds$$

และ

$$V(x(0)) = x^T(0)Px(0) + \int_{-h_1}^{0} x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{-h_2}^{0} x^T(s)Q_2x(s)ds$$
$$+\int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0} \dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds + \int_{-h_1}^{-h_2}\int_{s}^{0} \dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds$$
$$< x^T(0)\beta_2Ix(0) + \int_{-h_1}^{0} x^T(s)\beta_3Ix(s)ds + \int_{-h_2}^{0} x^T(s)\beta_4Ix(s)ds$$
$$+\int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0} \dot{x}^T(\theta)\beta_5I\dot{x}(\theta)d\theta ds + \int_{-h_1}^{-h_2}\int_{s}^{0} \dot{x}^T(\theta)\beta_6I\dot{x}(\theta)d\theta ds$$
$$\le \beta_2\|\phi\|^2 + \beta_3\int_{-h_1}^{0}\|\phi\|^2ds + \beta_4\int_{-h_2}^{0}\|\phi\|^2ds + \beta_5\int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0}\|\phi\|^2d\theta ds + \beta_6\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{s}^{0}\|\phi\|^2d\theta ds$$
$$= \Big(\beta_2 + \beta_3h_1 + \beta_4h_2 + \beta_5\Big(\frac{(h_1)^2}{2}\Big) + \beta_6\Big(\frac{(h_2)^2-(h_1)^2}{2}\Big)\Big)\|\phi\|^2 \qquad (13)$$

ถัดไปเรากำหนด

$$\Pi := c_1\left\{\beta_2 + \beta_3h_1 + \beta_4h_2 + \beta_5\Big(\frac{(h_1)^2}{2}\Big) + \beta_6\Big(\frac{(h_2)^2-(h_1)^2}{2}\Big)\right\} - \beta_1c_2e^{-\alpha T} \qquad (14)$$

จากบทแทรกเชอร์คอมพลีเมนต์ (Schur complement lemma) จะได้ $\Pi < 0$ นั่นคือ

$$c_1\Big[\beta_2 + \beta_3h_1 + \beta_4h_2 + \beta_5\Big(\frac{(h_1)^2}{2}\Big) + \beta_6\Big(\frac{(h_2)^2-(h_1)^2}{2}\Big)\Big] < \beta_1c_2e^{-\alpha T} \qquad (15)$$

กำหนดให้ $\|\phi\|^2 \le c_1$ จากอสมการ (12) และ (13) จะได้

เมื่อ $t \in [0,T]$ และ $T \ge 0$ โดย $t - T \le 0$ และ $e^{\alpha(t-T)} \le 1$

$$\beta_1\|x(t)\|^2 < e^{\alpha t}c_2\beta_1e^{-\alpha T} \le c_2$$

ดังนั้น $\|x(t)\|^2 < c_2$ $\square$

เสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาโดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ที่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล

ต่อไปจะแสดงเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลาโดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ที่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล สามารถแสดงได้ดังนี้

กำหนดให้ h_1, h_2, α เป็นค่าคงที่ และ

$$\gamma_1 = \Big(\frac{e^{-\alpha h_1}-1}{\alpha}\Big), \gamma_2 = \Big(\frac{e^{-\alpha h_2}-1}{\alpha}\Big), \gamma_3 = \Big(\frac{e^{\alpha h_1}-\alpha h_1-1}{\alpha^2}\Big), \gamma_4 = \Big(\frac{e^{\alpha h_2}-e^{\alpha h_1}+\alpha(h_1-h_2)}{\alpha^2}\Big)$$

ทฤษฎีบท 2 ระบบเชิงเส้นที่ไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล มีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \le c_1 < c_2$ ถ้ามีสเกลาร์บวก

α และ P, Q_1, Q_2, R_1 และ $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีค่าบวกแน่นอน และสเกลาร์บวก $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ ที่ซึ่ง

$$\beta_1 I < P < \beta_2 I, 0 < Q_1 < \beta_3 I, 0 < Q_2 < \beta_4 I, 0 < R_1 < \beta_5 I, 0 < R_2 < \beta_6 I,$$

และ

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{11} & \tilde{\omega}_{12} & \tilde{\omega}_{13} & \tilde{\omega}_{14} & \tilde{\omega}_{15} & \tilde{\omega}_{16} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 \end{bmatrix} < 0,$$

โดยที่ $\tilde{\omega}_{11} = -\beta_1 c_2 e^{\alpha T}$, $\tilde{\omega}_{12} = \beta_2\sqrt{c_1}$, $\tilde{\omega}_{13} = \beta_3\sqrt{c_1\gamma_1}$, $\tilde{\omega}_{14} = \beta_4\sqrt{c_1\gamma_2}$,
$\tilde{\omega}_{15} = \beta_5\sqrt{c_1\gamma_3}$, $\tilde{\omega}_{16} = \beta_6\sqrt{c_1\gamma_4}$,

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{11} & \tilde{\Psi}_{12} & \tilde{\Psi}_{13} & 0 & \tilde{\Psi}_{15} & \tilde{\Psi}_{16} & \tilde{\Psi}_{17} & 0 & 0 \\ * & \tilde{\Psi}_{22} & \tilde{\Psi}_{23} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Psi}_{27} & 0 & \tilde{\Psi}_{29} \\ * & * & \tilde{\Psi}_{33} & \tilde{\Psi}_{34} & \tilde{\Psi}_{35} & \tilde{\Psi}_{36} & 0 & \tilde{\Psi}_{38} & \tilde{\Psi}_{39} \\ * & * & * & \tilde{\Psi}_{44} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Psi}_{48} & 0 \\ * & * & * & * & \tilde{\Psi}_{55} & \tilde{\Psi}_{56} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \tilde{\Psi}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \tilde{\Psi}_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \tilde{\Psi}_{88} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \tilde{\Psi}_{99} \end{bmatrix} < 0,$$

และ $h_{21} = h_2 - h_1$

$$\tilde{\Psi}_{11} = [PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_0 - \alpha P - \frac{4R_1}{h_1} + H^T H$$

$$\tilde{\Psi}_{12} = -\frac{2R_1}{h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{13} = PA_1 + A_1^T + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1 + H^T H_d$$

$$\tilde{\Psi}_{15} = PG + G^T P + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G \quad , \quad \tilde{\Psi}_{16} = \frac{6R_1}{h_1}$$

$$\tilde{\Psi}_{22} = -e^{\alpha(h_1)}Q_1 - \frac{4R_1}{h_1} - \frac{4R_2}{h(t) - h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{23} = -\frac{2R_1}{h(t) - h_1}$$

$$\tilde{\Psi}_{26} = \frac{6R_1}{h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{28} = \frac{6R_2}{h(t) - h_1}$$

$$\tilde{\Psi}_{33} = A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1 - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)} - \frac{4R_2}{h(t) - h_1} H_d^T H_d$$

$$\tilde{\Psi}_{34} = -\frac{2R_2}{h_2 - h(t)} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{35} = A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G$$

$$\tilde{\Psi}_{37} = \frac{6R_2}{h_2 - h(t)} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{38} = \frac{6R_2}{h(t) - h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{44} = -e^{\alpha(h_2)}Q_2 - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)}$$

$$\tilde{\Psi}_{47} = \frac{6R_2}{h_2 - h(t)} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{55} = Gg^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G - I$$

$$\tilde{\Psi}_{66} = -\frac{12R_1}{h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{77} = -\frac{12R_2}{h_2 - h(t)} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{88} = -\frac{12R_2}{h(t) - h_1}$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ที่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล ต่อไปนี้

$$\tilde{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{5} \tilde{V}_i(x(t))$$

ที่ซึ่ง

$$\tilde{V}_1(x(t)) = x^T(t)Px(t),$$

$$\tilde{V}_2(x(t)) = \int_{t-h_1}^{t} e^{\alpha(t-s)}x^T(s)Q_1x(s)ds,$$

$$\tilde{V}_3(x(t)) = \int_{t-h_2}^{t} e^{\alpha(t-s)}x^T(s)Q_2x(s)ds,$$

$$\tilde{V}_4(x(t)) = \int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{\alpha(t-\theta)}\dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds,$$

$$\tilde{V}_5(x(t)) = \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{\alpha(t-\theta)}\dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds$$

พิจารณาอนุพันธ์ของ $V(x(t))$ จะได้

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_1(x(t)) = {} & x^T(t)\left[PA_0 + PA_0^T - \alpha P\right]x(t) + 2x^T(t)\left[PA_1 + A_1^TP\right]x(t-h(t)) \\ & +2x^T(t)\left[PG + G^TP\right]z(t) + \alpha V_1x(t)\end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{V}}_2(x(t)) = x^T(t)Q_1x(t) - e^{\alpha(h_1)}x^T(t-h_1)Q_1x(t-h_1) + \alpha V_2(x(t))$$

$$\dot{\tilde{V}}_3(x(t)) = x^T(t)Q_2x(t) - e^{\alpha(h_2)}x^T(t-h_2)Q_2x(t-h_2) + \alpha V_3(x(t))$$

$$\dot{\tilde{V}}_4(x(t)) = h_1\dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) - \int_{t-h_1}^{t} e^{\alpha(t-u)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du + \alpha V_4(x(t))$$

$$\dot{\tilde{V}}_5(x(t)) = h_{21}\dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) - \int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{\alpha(t-u)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du + \alpha V_5(x(t))$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}(x(t)) - \alpha V(x(t)) \le {} & x^T(t)\left[PA_0 + A_0^TP + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_0 - \alpha P\right]x(t) \\ & +2x^T(t)\left[PA_1 + A_1^TP + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1\right]x(t-h(t)) \\ & +2x^T(t)[PG + G^TP + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G]z(t) \\ & -x^T(t-h_1)e^{\alpha(h_1)}x^T(t-h_1)Q_1x(t-h_1) - x^T(t-h_2)e^{\alpha(h_2)}x^T(t-h_2)Q_2x(t-h_2) \\ & +x^T(t-h(t))[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1]x(t-h(t)) \\ & +2x^T(t-h(t))[A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G]z(t) + z^T(t)[G^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G]z(t) \\ & -\int_{t-h_1}^{t} e^{\alpha(t-u)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du - \int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{\alpha(t-u)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du\end{aligned}$$

ต่อไปพิจารณา $-\int_{t-h_1}^{t} e^{\alpha(t-u)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du$ และ $-\int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{\alpha(t-u)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du$ ดังนี้

สำหรับ $t>0$ และ $s\in[t-h_2,t]$ นั่นคือ

$$-\int_{t-h_1}^{t} e^{\alpha(t-u)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du \le -\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du$$

และ

$$\begin{aligned}-\int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{\alpha(t-u)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du &\le -\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du\\ &\le -\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du-\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)du\end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\varpi_1(t)=\left[x^T(t)\quad x^T(t-h_1)\quad \frac{1}{h_1}\int_{t-h_1}^{t}x^T(u)du\right]^T$$

$$\varpi_2(t)=\left[x^T(t-h(t))\quad x^T(t-h_2)\quad \frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x^T(u)du\right]^T$$

$$\varpi_3(t)=\left[x^T(t-h_1)\quad x^T(t-h(t))\quad \frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x^T(u)du\right]^T$$

และ

$$\begin{aligned}\eta(t)=\Big[&x^T(t)\quad x^T(t-h_1)\quad x^T(t-h(t))\quad x^T(t-h_2)\quad z^T(t)\\ &\frac{1}{h_1}\int_{t-h_1}^{t}x^T(u)du\quad \frac{1}{h(t)-h_1}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}x^T(u)du\quad \frac{1}{h_2-h(t)}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}x^T(u)du\Big]^T.\end{aligned}$$

โดยบทตั้งอสมการเวิลด์ทิงเจอร์ (Wirtinger inequality lemma) จะได้ว่า

$$-\int_{t-h_1}^{t}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds\le -\frac{1}{h_1}\varpi_1^T(t)\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_1(t)$$

$$-\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds\le -\frac{\varpi_2^T(t)}{h_2-h(t)}\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_2(t)$$

$$-\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds\le -\frac{\varpi_3^T(t)}{h(t)-h_1}\begin{bmatrix}4R_2 & 2R_2 & -6R_2\\ * & 4R_2 & -6R_2\\ * & * & 12R_2\end{bmatrix}\varpi_3(t)$$

พิจารณา $z^T(t)z(t)$ จะได้

$$\begin{aligned}z^T(t)z(t)&=\Big(\Delta(t)\big(Hx(t)+H_dx(t-h(t))\big)\Big)^T\Big(\Delta(t)\big(Hx(t)+H_dx(t-h(t))\big)\Big)\\ &\le x^T(t)H^THx(t)+2x^T(t)H^TH_dx(t-h(t))+x^T(t-h(t))H_d^TH_dx(t-h(t))\end{aligned}$$

จาก $V_1(x(t))\le V(x(t))$ จะได้ $\dot{V}(x(t))-\alpha V(x(t))\le \dot{V}(x(t))-\alpha V_1(x(t))$

จะได้ว่า $\dot{V}(x(t))-\alpha V(x(t))\le \eta^T(t)\Psi\eta(t)$ (16)

โดยที่ $\Psi<0$ จะได้ $\eta^T(t)\Psi\eta(t)<0$ (17)

ดังนั้น จากอสมการ (15) และ (16) จะได้ว่า

$\dot{V}(x(t))-\alpha V(x(t))<0$ (18)

นำ $e^{-\alpha t}$ คูณในอสมการ (17) และอินทิเกรตจาก 0 ถึง t กับ $t\in[0,T]$ จะได้

$$e^{-\alpha t}V(x(t))<V(x(0))$$

และ $x^T(t)Px(t) = V_1(x(t)) \le V(x(t)) < e^{\alpha t}V(x(0))$

จากความสัมพันธ์ $\beta_1 I < P < \beta_2 I$ จะได้

$$\beta_1 \| x(t) \|^2 < e^{\alpha t}V(x(0)) \tag{19}$$

พิจารณา

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h_1}^{t} e^{\alpha(t-s)}x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-h_2}^{t} e^{\alpha(t-s)}x^T(s)Q_2x(s)ds$$
$$+ \int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{\alpha(t-\theta)}\dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds + \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{\alpha(t-\theta)}\dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds$$

$$V(x(0)) = x^T(0)Px(0) + \int_{-h_1}^{0} e^{\alpha(-s)}x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{-h_2}^{0} e^{\alpha(-s)}x^T(s)Q_2x(s)ds$$
$$+ \int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0} e^{\alpha(-\theta)}\dot{x}^T(\theta)R_1\dot{x}(\theta)d\theta ds + \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{s}^{0} e^{\alpha(\theta)}\dot{x}^T(\theta)R_2\dot{x}(\theta)d\theta ds$$
$$< \beta_2 x^T(0)Ix(0) + \beta_3\int_{-h_1}^{0} e^{-\alpha s}x^T(s)Ix(s)ds + \beta_4\int_{-h_2}^{0} e^{-\alpha s}x^T(s)Ix(s)ds$$
$$+ \beta_5\int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0} e^{-\alpha\theta}\dot{x}^T(\theta)I\dot{x}(\theta)d\theta ds + \beta_6\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{s}^{0} e^{-\alpha\theta}\dot{x}^T(\theta)I\dot{x}(\theta)d\theta ds$$
$$\le \beta_2 \| \phi \|^2 + \beta_3\int_{-h_1}^{0} e^{-\alpha s} \| \phi \|^2 ds + \beta_4\int_{-h_2}^{0} e^{-\alpha s} \| \phi \|^2 ds$$
$$+ \beta_5\int_{-h_1}^{0}\int_{s}^{0} e^{-\alpha\theta} \| \phi \|^2 d\theta ds + \beta_6\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{s}^{0} e^{-\alpha\theta} \| \phi \|^2 d\theta ds \tag{20}$$
$$= \left(\beta_2 + \gamma_1\beta_3 + \gamma_2\beta_4 + \gamma_3\beta_5 + \gamma_4\beta_6\right) \| \phi \|^2$$

เมื่อ

$$\gamma_1 = \left(\frac{e^{-\alpha h_1} - 1}{\alpha}\right), \gamma_2 = \left(\frac{e^{-\alpha h_2} - 1}{\alpha}\right), \gamma_3 = \left(\frac{e^{\alpha h_1} - \alpha h_1 - 1}{\alpha^2}\right), \gamma_4 = \left(\frac{e^{\alpha h_2} - e^{\alpha h_1} + \alpha(h_1 - h_2)}{\alpha^2}\right)$$

ถัดไปเรากำหนด

$$\Pi := c_1\{\beta_2 + \beta_3\gamma_1 + \beta_4\gamma_2 + \beta_5\gamma_3 + \beta_6\gamma_4\} - \beta_1 c_2 e^{-\alpha T} \tag{21}$$

จากบทแทรกของเชอร์คอมพลีเมนต์ (Schur complement lemma) จะได้ $\Pi < 0$ นั่นคือ

$$c_1\left[\beta_2 + \beta_3\gamma_1 + \beta_4\gamma_2 + \beta_5\gamma_3 + \beta_6\gamma_4\right] < \beta_1 c_2 e^{-\alpha T} \tag{22}$$

กำหนดให้ $\| \phi \|^2 \le c_1$ จากอสมการ (18) และ (19) จะได้

เมื่อ $t \in [0,T]$ และ $T \ge 0$ โดย $t - T \le 0$ และ $e^{\alpha(t-T)} \le 1$

$$\beta_1 \| x(t) \|^2 < e^{\alpha t}c_2\beta_1 e^{-\alpha T} \le c_2$$

ดังนั้น $\| x(t) \|^2 < c_2$ □

สรุปผลการวิจัย

สำหรับการดำเนินการวิจัยเพื่อหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับเสถียรภาพเวลาจำกัดของระบบเชิงเส้นไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่แตกต่างกันได้ข้อสรุป ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ระบบเชิงเส้นที่ไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่ไม่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล มีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1, c_2, T) เมื่อ $0 \le c_1 < c_2$ ถ้ามีสเกลาร์บวก α และ P, Q_1, Q_2, R_1 และ $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีค่าบวกแน่นอนและสเกลาร์บวก $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ ที่ซึ่ง

$$\beta_1 I < P < \beta_2 I,\ 0 < Q_1 < \beta_3 I,\ 0 < Q_2 < \beta_4 I,\ 0 < R_1 < \beta_5 I,\ 0 < R_2 < \beta_6 I,$$

และ

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{15} & \omega_{16} \\ * & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_6 \end{bmatrix} < 0,$$

โดยที่ $\omega_{11} = -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T}$, $\omega_{12} = \beta_2\sqrt{c_1}$, $\omega_{13} = \beta_3\sqrt{c_1 h_1}$, $\omega_{14} = \beta_4\sqrt{c_1 h_2}$,

$$\omega_{15} = \beta_5\sqrt{c_1\left(\frac{(h_1)^2}{2}\right)},\ \omega_{16} = \beta_6\sqrt{c_1\left(\frac{(h_2)^2-(h_1)^2}{2}\right)},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & 0 & \Psi_{15} & \Psi_{16} & 0 & 0 \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} & 0 & 0 & \Psi_{26} & 0 & \Psi_{28} \\ * & * & \Psi_{33} & \Psi_{34} & \Psi_{35} & 0 & \Psi_{37} & \Psi_{38} \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 & 0 & \Psi_{47} & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Psi_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Psi_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Psi_{88} \end{bmatrix} < 0,$$

โดยที่ $h_{21} = h_2 - h_1$

$$\Psi_{11} = [PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2]A_0 - \alpha P - \frac{4R_1}{h_1} + H^T H$$

$$\Psi_{12} = -\frac{2R_1}{h_1},\ \Psi_{13} = PA_1 + A_0^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2]A_1 + H^T H_d$$

$$\Psi_{15} = PG + A_0^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2]G,\ \Psi_{16} = \frac{6R_1}{h_1}$$

$$\Psi_{22} = -Q_1 - \frac{4R_1}{h_1} - \frac{4R_2}{h(t)-h_1},\ \Psi_{23} = -\frac{2R_1}{h(t)-h_1}$$

$$\Psi_{26} = \frac{6R_1}{h_1},\ \Psi_{28} = \frac{6R_2}{h(t)-h_1}$$

$$\Psi_{33} = A_1^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2]A_1 - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)} - \frac{4R_2}{h(t)-h_1} + H_d^T H_d$$

$$\Psi_{34} = -\frac{2R_2}{h_2 - h(t)},\ \Psi_{35} = A_1^T[h_1 R_1 + h_{21} R_2]G$$

$$\Psi_{37}=-\frac{2R_2}{h_2-h(t)},\Psi_{38}=\frac{6R_2}{h_2-h(t)},\Psi_{44}=-Q_2-\frac{4R_2}{h_2-h(t)}$$
$$\Psi_{47}=\frac{6R_2}{h(t)-h_1},\Psi_{55}=G^T[h_1R_1+h_{21}R_2]G-I$$
$$\Psi_{66}=-\frac{12R_1}{h_1},\Psi_{77}=-\frac{12R_2}{h_2-h(t)},\Psi_{88}=-\frac{12R_2}{h(t)-h_1}$$

เมื่อ h_1,h_2,α เป็นค่าคงที่ และ

$$\gamma_1=\left(\frac{e^{-\alpha h_1}-1}{\alpha}\right),\gamma_2=\left(\frac{e^{-\alpha h_2}-1}{\alpha}\right),\gamma_3=\left(\frac{e^{\alpha h_1}-\alpha h_1-1}{\alpha^2}\right),\gamma_4=\left(\frac{e^{\alpha h_2}-e^{\alpha h_1}+\alpha(h_1-h_2)}{\alpha^2}\right)$$

ทฤษฎีบท 2 ระบบเชิงเส้นที่ไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา โดยใช้ ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ที่เป็นฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล มีเสถียรภาพเวลาจำกัด ที่สอดคล้องกับ (c_1,c_2,T) เมื่อ $0\le c_1<c_2$ ถ้ามีสเกลาร์บวก α และ P,Q_1,Q_2,R_1 และ $R_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีค่าบวกแน่นอน และสเกลาร์บวก $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6$ ที่ซึ่ง

$$\beta_1 I<P<\beta_2 I,\ 0<Q_1<\beta_3 I,\ 0<Q_2<\beta_4 I,\ 0<R_1<\beta_5 I,\ 0<R_2<\beta_6 I,$$

และ

$$\tilde{\omega}=\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_{11}&\tilde{\omega}_{12}&\tilde{\omega}_{13}&\tilde{\omega}_{14}&\tilde{\omega}_{15}&\tilde{\omega}_{16}\\ *&-\beta_2&0&0&0&0\\ *&*&-\beta_3&0&0&0\\ *&*&*&-\beta_4&0&0\\ *&*&*&*&-\beta_5&0\\ *&*&*&*&*&-\beta_6\end{bmatrix}<0,$$

โดยที่ $\tilde{\omega}_{11}=-\beta_1 c_2 e^{\alpha T},\ \tilde{\omega}_{12}=\beta_2\sqrt{c_1}$, $\tilde{\omega}_{13}=\beta_3\sqrt{c_1\gamma_1}$, $\tilde{\omega}_{14}=\beta_4\sqrt{c_1\gamma_2}$,
$\tilde{\omega}_{15}=\beta_5\sqrt{c_1\gamma_3}$, $\tilde{\omega}_{16}=\beta_6\sqrt{c_1\gamma_4}$,

$$\tilde{\Psi}=\begin{bmatrix}\tilde{\Psi}_{11}&\tilde{\Psi}_{12}&\tilde{\Psi}_{13}&0&\tilde{\Psi}_{15}&\tilde{\Psi}_{16}&\tilde{\Psi}_{17}&0&0\\ *&\tilde{\Psi}_{22}&\tilde{\Psi}_{23}&0&0&0&\tilde{\Psi}_{27}&0&\tilde{\Psi}_{29}\\ *&*&\tilde{\Psi}_{33}&\tilde{\Psi}_{34}&\tilde{\Psi}_{35}&\tilde{\Psi}_{36}&0&\tilde{\Psi}_{38}&\tilde{\Psi}_{39}\\ *&*&*&\tilde{\Psi}_{44}&0&0&0&\tilde{\Psi}_{48}&0\\ *&*&*&*&\tilde{\Psi}_{55}&\tilde{\Psi}_{56}&0&0&0\\ *&*&*&*&*&\tilde{\Psi}_{66}&0&0&0\\ *&*&*&*&*&*&\tilde{\Psi}_{77}&0&0\\ *&*&*&*&*&*&*&\tilde{\Psi}_{88}&0\\ *&*&*&*&*&*&*&*&\tilde{\Psi}_{99}\end{bmatrix}<0,$$

โดยที่ $h_{21}=h_2-h_1$

$$\tilde{\Psi}_{11} = [PA_0 + A_0^T P + Q_1 + Q_2 + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_0 - \alpha P - \frac{4R_1}{h_1} + H^T H$$

$$\tilde{\Psi}_{12} = -\frac{2R_1}{h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{13} = PA_1 + A_1^T + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1 + H^T H_d$$

$$\tilde{\Psi}_{15} = PG + G^T P + A_0^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G \quad , \quad \tilde{\Psi}_{16} = \frac{6R_1}{h_1}$$

$$\tilde{\Psi}_{22} = -e^{\alpha(h_1)}Q_1 - \frac{4R_1}{h_1} - \frac{4R_2}{h(t)-h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{23} = -\frac{2R_1}{h(t)-h_1}$$

$$\tilde{\Psi}_{26} = \frac{6R_1}{h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{28} = \frac{6R_2}{h(t)-h_1}$$

$$\tilde{\Psi}_{33} = A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]A_1 - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)} - \frac{4R_2}{h(t)-h_1} H_d^T H_d$$

$$\tilde{\Psi}_{34} = -\frac{2R_2}{h_2 - h(t)} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{35} = A_1^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G$$

$$\tilde{\Psi}_{37} = \frac{6R_2}{h_2 - h(t)} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{38} = \frac{6R_2}{h(t)-h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{44} = -e^{\alpha(h_2)}Q_2 - \frac{4R_2}{h_2 - h(t)}$$

$$\tilde{\Psi}_{47} = \frac{6R_2}{h_2 - h(t)} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{55} = Gg^T[h_1R_1 + h_{21}R_2]G - I$$

$$\tilde{\Psi}_{66} = -\frac{12R_1}{h_1} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{77} = -\frac{12R_2}{h_2 - h(t)} \quad , \quad \tilde{\Psi}_{88} = -\frac{12R_2}{h(t)-h_1}$$

อภิปรายผลการวิจัย

บทความวิจัยฉบับนี้ได้เลือกใช้ฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟกี้และอสมการที่เกี่ยวข้องเพื่อให้การพิสูจน์ไม่มีความซับซ้อน โดยได้ผลลัพธ์ของเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับระบบสมการดังกล่าวที่เด่นชัดคือ ฟังก์ชันที่เป็นตัวหน่วงเชิงเวลาที่ได้ไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ เอส บี สโตจาโนวิก ในปี ค.ศ. 2016 ที่ฟังก์ชันตัวหน่วงเชิงเวลาต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้เท่านั้น จึงจะมีเสถียรภาพเป็นไปตามนิยาม

ผลการวิจัยของบทความวิจัยฉบับนี้จึงได้ทฤษฎีบทที่ครอบคลุมฟังก์ชันของตัวหน่วงเชิงเวลาได้หลากหลายกว่า และมีขั้นตอนการดำเนินการวิจัย (พิสูจน์) ที่มีความซับซ้อนน้อยกว่า

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

สามารถนำเงื่อนไขที่ทำให้ระบบเชิงเส้นที่ไม่แน่นอนที่มีตัวหน่วงเชิงเวลา มีเสถียรภาพเวลาจำกัดไปประยุกต์ใช้กับปัญหาจริงที่เกิดขึ้นในปัจจุบันได้เพื่อควบคุมให้ระบบที่สนใจเกิดเสถียรภาพในการทำงาน

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

สามารถนำเทคนิคการพิสูจน์ และฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกี้ ดังกล่าวไปหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับระบบสมการอื่น ๆ ได้ต่อไป

เอกสารอ้างอิง

Stojanovic, S.B., Debeljkovic, D.L. and Antic, D.S. (2012). Finite-time stability and stabilization of linear time-delay systems. **facta Univ Automat Control Robot, 11**(1), 25-36.

Rojsiraphisal, T. and Puangmalai, J. (2014). An inproved Finite-time stability and stabilization of linear system with constant delay. **Mathematical Problems in Engineering**, Available: https://doi.org/10.1155/2014/154769.

Zhang, Z., Zhang, Z. and Zhang, H. (2015). Finite-time stability analysis and stabilization for uncertain continuous-time system with time-varying delay. **J Flanklin Inst, 32**, 1296-1317.

Stojanovic, S.B. (2016). Further improvement in delay-dependent finite-time stability criteria for uncertain continuous-time system with time varying delay. **IET Control Theory and Applications, 10**, 926-938.