รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

ขั้นตอนวิธีสำหรับการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$

An Algorithm for finding the Minimum Hamiltonian Cycle on Complete Bipartite Graph $K_{4,4}$

เบญจวรรณ แก้วลือไชย[1] และนิรุตติ์ พิพรรธนจินดา[2]

Benjawan Kaewluechai[1] and Nirut Pipattanajinda[2]

[1]นักศึกษาประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
[2]อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร
E-mail: ben_manee00@hotmail.com[1], nirutt.p@gmail.com[2]

บทคัดย่อ

กราฟ G จะเรียกว่าเป็นแฮมิลโทเนียนกราฟ ถ้ามีไซเคิลที่บรรจุทุกจุดในกราฟ G และเรียกกราฟที่แต่ละเส้นมีน้ำหนักว่าเป็นกราฟที่มีน้ำหนัก ในบทความนี้ จะเป็นการศึกษาคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่มีน้ำหนักกับการหาแฮมิลโท-เนียนไซเคิลที่น้อยที่สุด เมื่อกำหนดอย่างน้อย 1 เส้นของไซเคิล และนำไปประยุกต์สำหรับการหาขั้นตอนวิธีการสำหรับการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$

คำสำคัญ: แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุด/ คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ/ กราฟที่มีน้ำหนัก

Abstract

A graph G is said to be a Hamiltonian graph if there exists a cycle to contain every vertex in G, and called graph with every edge has weight by weighted graph. In this paper, studies complete bipartite weighted graph with minimum Hamiltonian cycle when fixed at least one edge, and applied for finding the algorithm for the minimum Hamiltonian cycle on complete bipartite graph $K_{4,4}$.

Keywords: minimum Hamiltonian cycle / complete bipartite graph / weighted graph

1. บทนำ

สำหรับแฮมิลโทเนียนกราฟ เริ่มตั้งแต่ปี ค.ศ. 1859 โดยเซอร์ วิลเลียม แฮมิลตัน (Sir William Hamilton : 1805 – 1865) ได้สร้างเกมชื่อว่าการเดินทางรอบโลก (travel around the word) โดยสร้างรูปทรงสิบสองหน้าปรกติ (regular dodecahedron) ซึ่งเป็นทรงที่มี 20 จุดยอดและ 30 ขอบ โดยกำหนดจุดยอดแทนด้วยชื่อเมืองต่างๆ โดยรูปทรงสิบสองหน้าปรกติ สำหรับกติกาการเล่นเกมดังกล่าวคือให้ผู้เล่นเริ่มต้นจากเมืองใดเมืองหนึ่งแล้วเดินทางให้ครบทุกเมือง เมืองละหนึ่งครั้งเท่านั้น แล้วกลับมาอยู่ที่เมืองเดิมได้ กล่าวได้ว่าสำหรับกราฟใด ๆ จะเป็นแฮมิลโทเนียนกราฟถ้ากราฟนั้นบรรจุไซเคิลที่บรรจุทุกจุดในกราฟ การหาเงื่อนไขความพอเพียงของการเป็นแฮมิลโทเนียนกราฟนั้น ปัจจุบันยังเป็นปัญหาเปิดทางทฤษฎีกราฟ แต่ยังมีการให้บทนิยามโคลสเซอร์ของกราฟ ที่สามารถแสดงได้ว่า สำหรับกราฟใด ๆ จะเป็นแฮมิล-โทเนียนกราฟ ก็ต่อเมื่อ โคลสเซอร์ของกราฟนั้นจะเป็นแฮมิลโทเนียนกราฟด้วย ซึ่งผลจากทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ยังไม่ได้ให้เงื่อนไขที่ดีพอสำหรับการเป็นแฮมิลโทเนียนกราฟอยู่ดี ซึ่งนอกจากการศึกษาเงื่อนไขความพอเพียงของการเป็นแฮมิลโท-เนียนกราฟที่ยังเป็นปัญหาสำคัญทางทฤษฎีกราฟ ยังมีการศึกษาขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบน คอมพลีทกราฟที่มีน้ำหนัก ได้แก่ ขั้นตอนวิธี Brute Force ขั้นตอนวิธี Nearest Neighbor ขั้นตอนวิธี Repetitive Nearest Neighbor และ ขั้นตอนวิธี Cheapest-

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

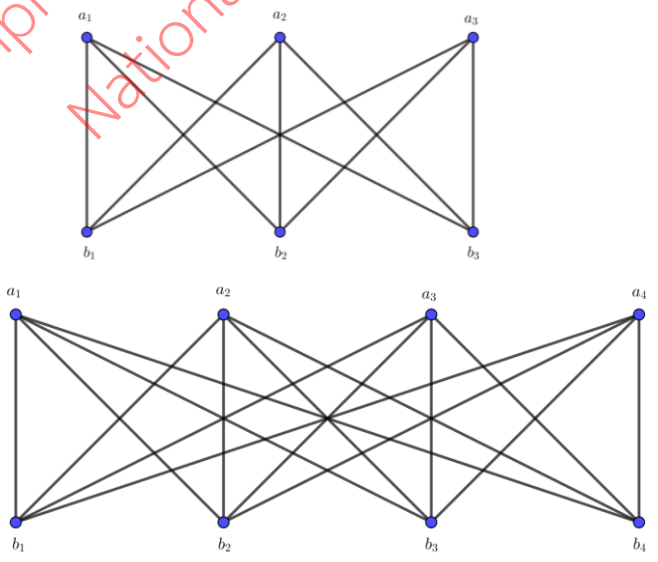
Link เป็นต้น สำหรับขั้นตอนวิธีอื่นๆ ของสาขาทฤษฎีกราฟ ผู้อ่านสามารถศึกษาเพิ่มเติมจากเอกสารอ้างอิง ได้แก่ ตำรา Graph Theory with Algorithms and its Applications โดย Santanu Saha Ray

จากการศึกษาทฤษฎีกราฟกับการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทกราฟที่มีน้ำหนักดังกล่าว ทำให้ผู้จัดทำสนใจที่จะทำการศึกษาขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่มีน้ำหนัก ซึ่งจะใช้เป็นแนวทางในการศึกษาการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนกราฟชนิดอื่น ๆ ต่อไปในอนาคต

สำหรับกราฟ (graph) G จะหมายถึงคู่อันดับที่ประกอบด้วยเซตจำนวนสองเซตที่มีความสัมพันธ์กัน คือ $G = (V, E)$ โดยที่ (1) เซต V จะเรียกว่าเซตของจุด (vertex set) ซึ่งเป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียก $v \in V$ ว่าจุด (vertex) ของกราฟ G และ (2) เซต E จะเรียกว่าเซตของเส้น (edge set) ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยสับเซตที่มีสองสมาชิกใน V กล่าวคือ $e \in E$ เมื่อ $e = \{u, v\}$ สำหรับบางสมาชิก $u, v \in V$ นั่นคือ $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V\}$ เรียกสมาชิก $e \in E$ ว่าเส้น (edge) ของกราฟ G เพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ $e = uv$ แทน $e = \{u, v\}$ เรียกลำดับของจุด $v_1, v_2, \ldots, v_r$ ในกราฟ G เมื่อ $v_i v_{i+1} \in E$ สำหรับทุก $i \in \{1,2, \ldots, r-1\}$ ว่าเป็นไซเคิล (cycle) ของกราฟ G ถ้า $v_1 = v_r$ และ $v_i \neq v_j$ สำหรับแต่ละ $i \neq j$ ที่ $\{i, j\} \neq \{1, r\}$

เรียกกราฟ $G = (V, E)$ ว่าเป็นไบพาร์ไทต์กราฟ (bipartite graph) ถ้า V มีพาร์ทิชันเป็น 2 เซตคือ A และ B โดยที่แต่ละ $u, v \in V$ ถ้า $uv \in E$ จะได้ว่า u และ v จะต้องอยู่ในพาร์ทิชันที่ต่างกันของ V นั่นคือ $u \in A$ และ $v \in B$ (หรือ $u \in B$ และ $v \in A$) โดยจะเรียก A และ B ว่าเป็นพาร์ไทต์เซต (partite set) ของ G สำหรับไบพาร์-ไทต์กราฟ $G = (V, E)$ ที่มีพาร์ไทต์เซตคือ A และ B เรียกว่าเป็น คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ (complete bipartite graph) ถ้าแต่ละ $u \in A$ และ $v \in B$ แล้วจะได้ว่า $uv \in E$ จะใช้สัญลักษณ์ $K_{r,s}$ แทน คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่มี $|A| = r$ และ $|B| = s$

ตัวอย่าง 1.1 สำหรับคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{3,3}$ และ $K_{4,4}$ จะเป็นกราฟที่มีแผนภาพดังต่อไปนี้



(1) แผนภาพของคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{3,3}$ (2) แผนภาพของคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$

ภาพที่ 1 คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{3,3}$ และ $K_{4,4}$

สำหรับกราฟ G ใด ๆ จะเรียกไซเคิล C ว่าเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิล (Hamiltonian cycle) ของกราฟ G ถ้า V เป็นไซเคิลที่บรรจุทุกจุดในกราฟ G และจะเรียกกราฟ G ว่าเป็นแฮมิลโทเนียนกราฟ (Hamiltonian graph) ถ้ากราฟ G บรรจุแฮมิลโทเนียนไซเคิล

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

เห็นได้ชัดว่า สำหรับกราฟคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟจะเป็นแฮมิลโทเนียน ก็ต่อเมื่อ $|A| = |B| \geq 2$ เมื่อ A และ B เป็นพาร์ไทต์เซตของคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟดังกล่าว ซึ่งจะเขียนเป็นบทตั้งได้ดังนี้

บทตั้ง 1.1 สำหรับกราฟ $K_{r,s}$ จะบรรจุแฮมิลโทเนียนไซเคิล ก็ต่อเมื่อ $r = s \geq 2$

นอกจากนี้ เราสามารถแสดงวิธีการหาจำนวนของแฮมิลโทเนียนไซเคิลบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ ได้ดังนี้

บทตั้ง 1.2 สำหรับกราฟ $K_{n,n}$ จะมีจำนวนแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่แตกต่างกันทั้งหมด $\frac{n!(n-1)!}{2}$ ไซเคิล

พิสูจน์ กำหนดให้ $K_{n,n}$ มีพาร์ไทต์กราฟเป็น $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$

สมมุติให้ $a_{n_1}, b_{n_1}, a_{n_2}, b_{n_2}, \dots, a_{n_n}, b_{n_n}, a_{n_1}$ เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลบนกราฟ $K_{n,n}$

จาก a_{n_1} ประชิดกับจำนวน n เส้นในเซต B

ดังนั้นจะได้ว่ามี n วิธี ที่ทำให้ a_{n_1} เชื่อมกับจุด b_{n_1}

จาก b_{n_1} ประชิดกับจำนวน $n-1$ เส้นในเซต A ยกเว้น a_{n_1}

ดังนั้นจะได้ว่ามี $n-1$ วิธี ที่ทำให้ b_{n_1} เชื่อมกับจุด a_{n_2}

จาก a_{n_2} ประชิดกับจำนวน $n-1$ เส้นในเซต B ยกเว้น b_{n_1}

ดังนั้นจะได้ว่ามี $n-1$ วิธี ที่ทำให้ a_{n_2} เชื่อมกับจุด b_{n_2}

จาก b_{n_2} ประชิดกับจำนวน $n-2$ เส้นในเซต A ยกเว้น a_{n_1} และ a_{n_2}

ดังนั้นจะได้ว่ามี $n-2$ วิธี ที่ทำให้ b_{n_2} เชื่อมกับจุด a_{n_3}

เมื่อดำเนินการโดยทำนองเดียวกันไปจนถึงจุด a_{n_n}

จะได้ว่า a_{n_n} ประชิดกับจำนวน 1 เส้นในเซต B ยกเว้น $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_{n-1}}$

ดังนั้นจะได้ว่ามี 1 วิธี ที่ทำให้ a_{n_n} เชื่อมกับจุด b_{n_n}

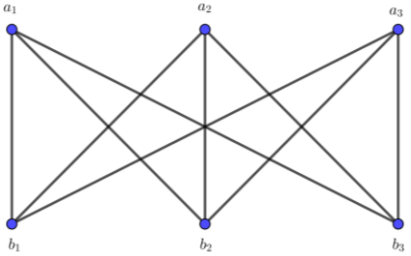
และจะได้ว่า b_{n_n} จะมีเพียง 1 วิธี ที่ทำให้ b_{n_1} เชื่อมกับจุด a_{n_1}

เนื่องจาก $a_{n_1}, b_{n_1}, a_{n_2}, b_{n_2}, \dots, a_{n_n}, b_{n_n}, a_{n_1}$ และ $a_{n_1}, b_{n_n}, a_{n_n}, b_{n_{n-1}}, \dots, a_{n_2}, b_{n_1}, a_{n_1}$ ต่างก็เป็นไซเคิลเดียวกัน

เพราะฉะนั้น จำนวนแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่แตกต่างกันทั้งหมดจะมีจำนวน $\frac{n!(n-1)!}{2}$ ไซเคิล

ตัวอย่าง 1.2 กราฟ $K_{3,3}$ และ $K_{4,4}$ จะบรรจุแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่แตกต่างกันทั้งหมดจำนวน $\frac{3!2!}{2} = 6$ ไซเคิล และจำนวน $\frac{4!3!}{2} = 72$ ไซเคิล ตามลำดับ

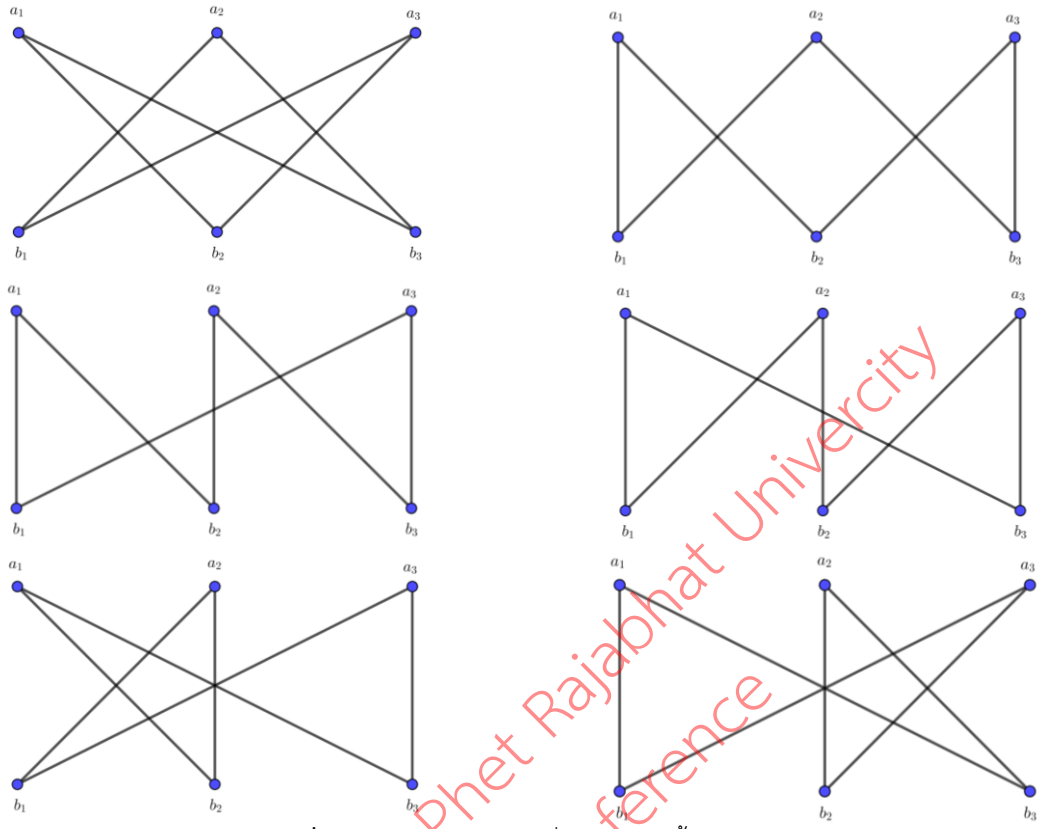
สำหรับกราฟ $K_{3,3}$ ที่ประกอบด้วยพาร์ไทต์เซต $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3\}$



ภาพที่ 2 คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{3,3}$

จะบรรจุแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่แตกต่างกันทั้งหมดดังแผนภาพต่อไปนี้

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร



ภาพที่ 3 แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่แตกต่างกันทั้งหมดบน $K_{3,3}$

สำหรับกราฟ G จะเรียก ว่าเป็นกราฟที่มีน้ำหนัก (weighted graph) ถ้ามีฟังก์ชัน $w: E \to R$ นั่นคือ สำหรับแต่ละ $e \in E$ จะได้ $w(e) = k$ เมื่อ $k \in R$ ถ้า H เป็นสับกราฟของกราฟที่มีน้ำหนัก G แล้วจะเรียก

$$w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e)$$

ว่าเป็น น้ำหนัก (weight) ของกราฟ H

สำหรับบทนิยาม ทฤษฎีบท และตัวอย่างอื่น ๆ ของทฤษฎีกราฟที่ไม่ได้กล่าวไว้ในบทความนี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือ ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น โดยนิรุตติ์ พิพรรธนจินดา หรือจากตำราต่างประเทศเรื่อง Introduction to Graph Theory โดย Robin J. Wilson ตามที่ได้อ้างอิงไว้ในส่วนท้ายของบทความ

2. การหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ

อันดับแรกจะกำหนดสัญลักษณ์ของจุด เส้น และน้ำหนักของแต่ละเส้น ของคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่มีน้ำหนัก ดังนี้

บทนิยาม 2.1 ให้ $K_{n,n}$ เป็นคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่ประกอบด้วยพาร์ไทต์เซต $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ จะกำหนดสัญลักษณ์ของเส้น $a_i b_j \in E(K_{n,n})$ ด้วย e_{ij} และมีน้ำหนักคือ $w(e_{ij}) = w_{ij}$

สำหรับคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{3,3}$ ที่มีน้ำหนักเป็นจำนวนจริง แล้วขั้นตอนวิธีการต่อไปนี้ จะทำให้ได้แฮมิลโท-เนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{3,3}$

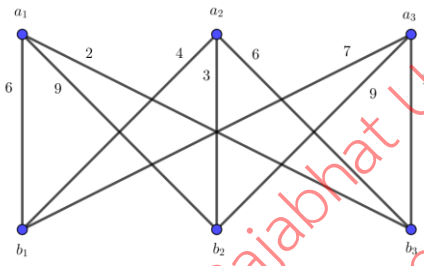
รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ $e_{1i}, e_{2j}, e_{3k} \in E(K_{3,3})$ โดยที่ $i \neq j \neq k$ ถ้า $w_{1i} + w_{2j} + w_{3k} = \max\{w_{1i} + w_{2j} + w_{3k} | i \neq j \neq k\}$ แล้ว $K_{3,3} - \{e_{1i}, e_{2j}, e_{3k}\}$ จะเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{3,3}$

พิสูจน์ เนื่องจากแต่ละจุด $a_i \in A$ จะมีดีกรีเป็น 3 ดังนั้นแฮมิลโทเนียนไซเคิลบน $K_{3,3}$ จึงหมายถึงการตัดเส้น e_{1i}, e_{2j}, e_{3k} โดยที่ $i \neq j \neq k$ ออกจากกราฟ $K_{3,3}$

เพราะฉะนั้น เพื่อให้ได้แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด จะได้ว่าจะต้องดำเนินการตัดเส้น e_{1i}, e_{2j}, e_{3k} โดยที่ $i \neq j \neq k$ ที่มีผลรวมของน้ำหนักมากที่สุดของกราฟ $K_{3,3}$

ตัวอย่าง 2.1 ให้ $K_{3,3}$ เป็นคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่มีน้ำหนักตามแผนภาพด้านล่าง



ภาพที่ 3 คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่มีน้ำหนัก $K_{3,3}$

จะได้วิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{3,3}$ ตามขั้นตอนวิธีการใน**ทฤษฎีบท 2.1** ดังต่อไปนี้

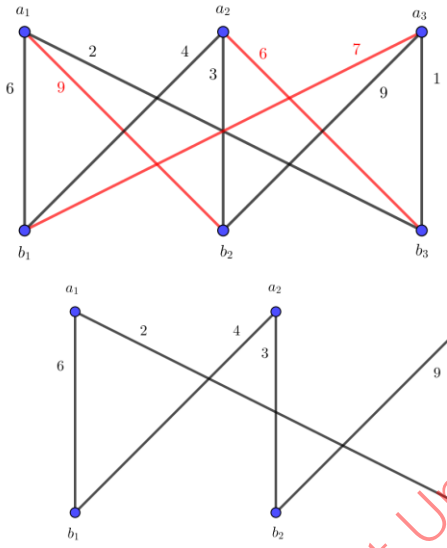
พิจารณา $w_{1i} + w_{2j} + w_{3k}$ โดยที่ $i \neq j \neq k$

จาก
$$w_{11} + w_{22} + w_{33} = 6 + 3 + 1 = 10$$
$$w_{11} + w_{23} + w_{32} = 6 + 6 + 9 = 21$$
$$w_{12} + w_{21} + w_{33} = 9 + 4 + 1 = 14$$
$$w_{12} + w_{23} + w_{31} = 9 + 6 + 7 = 22$$
$$w_{13} + w_{21} + w_{32} = 2 + 4 + 9 = 15$$
$$w_{13} + w_{22} + w_{31} = 2 + 3 + 7 = 12$$

จะได้ผลรวมน้ำหนักมากที่สุด คือ $w_{12} + w_{23} + w_{31} = 9 + 6 + 7 = 22$

ดังนั้นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{3,3}$ คือ $K_{3,3} - \{e_{12} + e_{23} + e_{31}\}$ ซึ่ง $w(K_{3,3}) = 25$ ดังภาพ

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร



ภาพที่ 5 แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{3,3}$

สำหรับเนื้อหาที่จะกล่าวถึงต่อไป จะกำหนดให้ $\{a_r, b_s\}$ หมายถึงเซตของจุด a_r และ b_s ในกราฟ $K_{n,n}$

ทฤษฎีบท 2.2 สำหรับ $a_r, b_s \in V(K_{n,n})$ ให้ C เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{n-1,n-1} = K_{n,n} - \{a_r, b_s\}$ ถ้า C' เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลใน $K_{n,n}$ โดยที่ $C' = C \cup P_\epsilon + W_\epsilon$ เมื่อ

1. P_ϵ เป็นพาธ P_1 ที่บรรจุจำนวน 1 เส้นคือ e_{rs}
2. $W_\epsilon = \{e_{rh}, e_{ks}\} - \{e_{kh}\}$ เมื่อ $w_{rh} + w_{ks} - w_{kh} = \min\{w_{ri} + w_{js} - w_{ij} | e_{ij} \in V(C)\}$

แล้ว C' จะเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{n,n}$ ที่บรรจุเส้น e_{rs}

พิสูจน์ สมมุติว่า C' ไม่เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{n,n}$ ที่บรรจุเส้น e_{rs}

จะได้ว่าจะต้องมี C'' ที่เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{n,n}$ ที่บรรจุเส้น e_{rs}

นั่นคือ $C'' = C \cup P_{\epsilon'} + W_{\epsilon'}$ เมื่อ $W_{\epsilon'} = \{e_{rh'}, e_{k's}\} - \{e_{k'h'}\}$ เมื่อ $w_{rh'} + w_{k's} - w_{k'h'} > w_{rh} + w_{ks} - w_{kh}$ $(*)$

จาก $w(C'') < w(C')$

จะได้ $w(C) + w_{rs} + w_{rh'} + w_{k's} - w_{k'h'} < w(C) + w_{rs} + w_{rh} + w_{ks} - w_{hk}$

นั่นคือ $w_{rh'} + w_{k's} - w_{k'h'} < w_{rh} + w_{ks} - w_{hk}$ ซึ่งเกิดการขัดแย้งกับ $(*)$

เพราะฉะนั้น C' จะเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{n,n}$ ที่บรรจุเส้น e_{rs}

จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่าบทแทรก 2.1 และ 2.2 ต่อไปนี้เป็นจริง

บทแทรก 2.1 สำหรับ $a_r, b_s \in V(K_{n,n})$ ให้ C เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{n-1,n-1} = K_{n,n} - \{a_r, b_s\}$ คือ m ถ้า C' เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลใน $K_{n,n}$ ที่บรรจุเส้น e_{rs} แล้ว C' จะมีน้ำหนักคือ $w(C) + w_{rs} + w_{rh} + w_{ks} - w_{hk}$

บทแทรก 2.2 สำหรับ $a_r, b_s \in V(K_{n,n})$ ให้ C เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{n-1,n-1} = K_{n,n} - \{a_r, b_s\}$ ถ้า C' เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลใน $K_{n,n}$ โดยที่ $C' = C \cup P_\epsilon + W_\epsilon$ เมื่อ

1. P_ϵ เป็นพาธ P_1 ที่บรรจุจำนวน 1 เส้นคือ e_{rs}

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

2. $W_\epsilon = \{e_{rh}, e_{ks}\} - \{e_{hk}\}$ เมื่อ $w_{rh} + w_{ks} - w_{hk} = \min\{w_{ri} + w_{js} - w_{ij} \mid e_{ij} \in V(C), i \neq t\}$

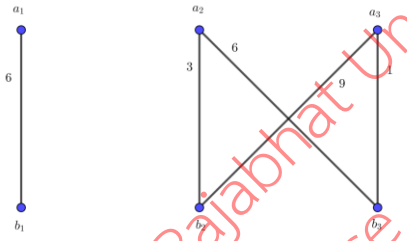
แล้ว C' จะเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{n,n}$ ที่บรรจุเส้น e_{rs} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{rt}

เราสามารถแสดงการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{3,3}$ ที่บรรจุเส้น e_{11} ตามวิธีการที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 2.2 ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2 สำหรับคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{3,3}$ ที่มีน้ำหนักตามตัวอย่างที่ 2.1

จะได้วิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{3,3}$ และบรรจุเส้น e_{11} ตามขั้นตอนวิธีการในทฤษฎีบท 2.2 ดังต่อไปนี้

เลือกเส้น e_{11} ที่ซึ่ง $w(e_{11}) = 6$ จะได้ เส้น e_{11} และกราฟ $K_{3,3} - \{e_{12}, e_{13}\}$ ดังภาพ



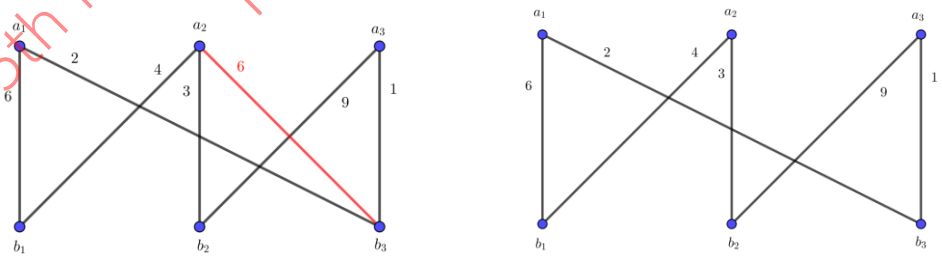
ภาพที่ 6 กราฟ $K_{3,3} - \{e_{12}, e_{13}\}$

พิจารณา $w_{rh} + w_{ks} - w_{hk}$

จาก
$$w_{12} + w_{21} - w_{22} = 9 + 4 - 3 = 10$$
$$w_{13} + w_{21} - w_{23} = 2 + 4 - 6 = 0$$
$$w_{12} + w_{31} - w_{32} = 9 + 7 - 9 = 7$$
$$w_{13} + w_{31} - w_{33} = 2 + 7 - 1 = 8$$

จะได้ค่าน้ำหนักน้อยที่สุด คือ $w_{13} + w_{21} - w_{23} = 2 + 4 - 6 = 0$

ดังนั้นจะได้ไซเคิล C ที่เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{3,3}$ ที่บรรจุเส้น e_{11} ที่มี $w(C) = 25$ ดังภาพ

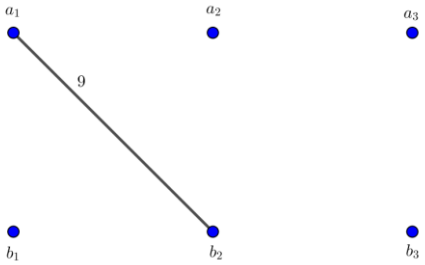


ภาพที่ 7 แฮมิลโทเนียนไซเคิล C ที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{3,3}$ ที่บรรจุเส้น e_{11}

นอกจากนี้ ยังได้ว่าเมื่อหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{3,3}$ และบรรจุเส้น e_{12} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{11} ตามขั้นตอนวิธีการในบทแทรก 2.2 ดังต่อไปนี้

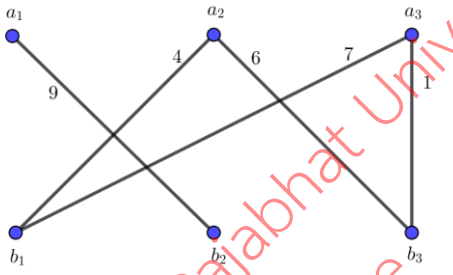
เลือกเส้น e_{12} ที่ซึ่ง $w(e_{12}) = 9$

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร



ภาพที่ 8 เลือกเส้น e_{12}

จะได้เส้น e_{12} และกราฟ $K_{3,3} - \{a_1, b_2\}$ ดังภาพ



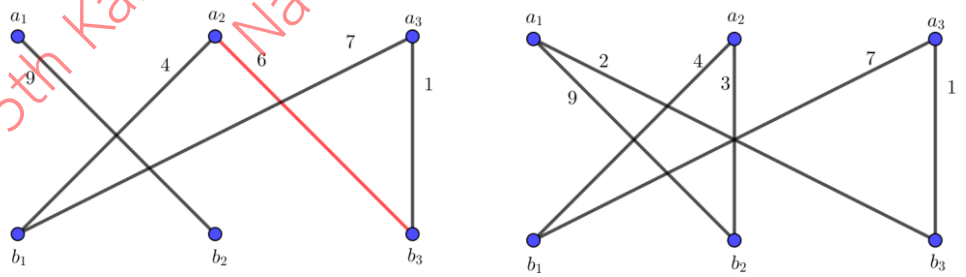
ภาพที่ 9 กราฟ $K_{3,3} - \{a_1, b_2\}$

พิจารณา $w_{rh} + w_{ks} - w_{hk}$ เมื่อ $h \neq 1$

จะได้ $w_{13} + w_{22} - w_{23} = 2 + 3 - 6 = -1$ และ $w_{13} + w_{32} - w_{33} = 2 + 9 - 1 = 10$

เลือกค่าน้ำหนักน้อยที่สุด คือ $w_{13} + w_{22} - w_{21} = 2 + 3 - 6 = -1$

จะได้ไซเคิล C' ที่เป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{3,3}$ และบรรจุเส้น e_{12} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{11} ที่มี $w(C') = 26$ ดังภาพ



ภาพที่ 10 แฮมิลโทเนียนไซเคิล C' ที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{3,3}$ ที่บรรจุเส้น e_{12} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{11}

เพราะฉะนั้น แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{3,3}$ คือไซเคิล C ซึ่งมีน้ำหนักคือ 25

3. ขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$

สำหรับหัวข้อนี้ จะแสดงขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ได้จากการศึกษาการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟในหัวข้อที่ผ่านมา

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

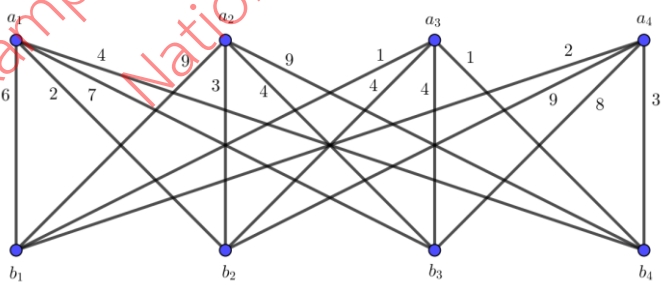
ขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$
สำหรับคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ ที่ประกอบด้วยพาร์ไทต์เซต $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ และ $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ จะกำหนดสัญลักษณ์ของเส้น $a_ib_j \in E(K_{n,n})$ ด้วย e_{ij} และมีน้ำหนักคือ $w(e_{ij})=w_{ij}$ จะได้ว่าขั้นตอนวิธีต่อไปนี้ จะทำให้ได้แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ สำหรับแต่ละ $k=1,2,3$ จะได้ 1. หาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{3,3}=K_{4,4}-\{a_1,b_k\}$ ที่ได้ตามขั้นตอนวิธีการใน**ทฤษฎีบท 2.1** 2. หาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ ที่บรรจุเส้น e_{1k} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{1i} เมื่อ $i<k$ ตามขั้นตอนวิธีการใน**ทฤษฎีบท 2.2** และ **บทแทรก 2.2** 3. เมื่อดำเนินการครบทุกค่าของ $k=1,2,3$ จะได้แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์-กราฟ $K_{4,4}$ คือแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดในข้อ 2

ทฤษฎีบท 3.1 แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่ได้จากขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ จะเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุด

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.2 และ บทแทรก 2.2 จะได้ว่า**ขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$** ในขั้นตอนที่ 1 และ 2 ทำให้เกิดแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์-กราฟ $K_{4,4}$ ที่บรรจุคู่ของเส้น $\{e_{11},e_{12}\},\{e_{11},e_{13}\},\{e_{11},e_{14}\},\{e_{12},e_{13}\},\{e_{12},e_{14}\}$ และ $\{e_{13},e_{14}\}$ ตามลำดับ ซึ่งครบทุกกรณีของแฮมิลโทเนียนไซเคิลใน $K_{4,4}$

เพราะฉะนั้น แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดในข้อ 2 จึงเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบ-พาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$

ตัวอย่าง 3.1 ให้ $K_{4,4}$ เป็นคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่มีน้ำหนักตามแผนภาพด้านล่าง

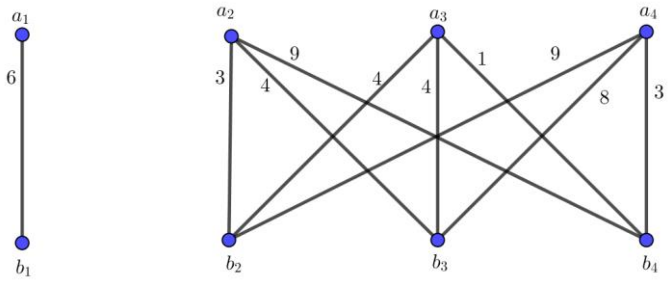


ภาพที่ 11 คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟที่มีน้ำหนัก $K_{4,4}$

จะได้วิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน $K_{4,4}$ และบรรจุเส้น e_{11} ตาม**ขั้นตอนขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$** ดังต่อไปนี้

(1) สำหรับ $k=1$ จะได้เส้น e_{11} และกราฟ $K_{4,4}-\{a_1,b_1\}$ ดังภาพ

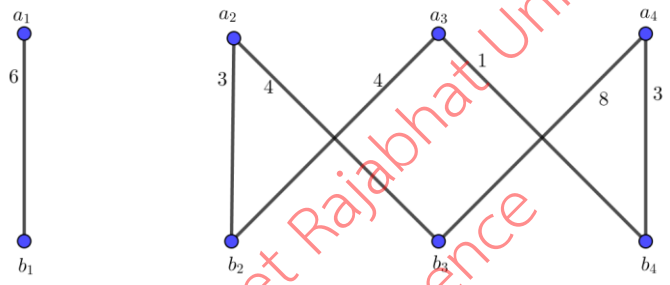
รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร



ภาพที่ 12 กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_1\}$

พิจารณา $w_{2i} + w_{3j} + w_{4k}$ โดยที่ $i \neq j \neq k$

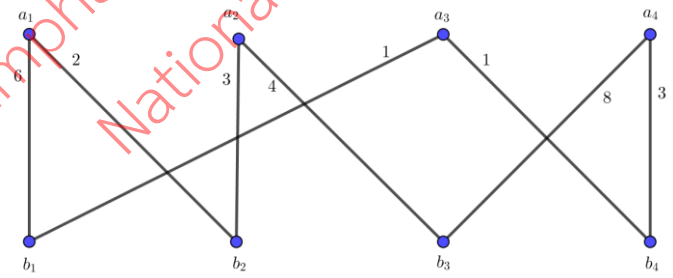
จาก $w_{24} + w_{33} + w_{42} = 22$ คือผลรวมน้ำหนักมากที่สุด จะได้แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีท-ไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_1\}$ ตามขั้นตอนวิธีการใน**ทฤษฎีบท 2.1** กับเส้น e_{11} ดังภาพ



ภาพที่ 13 แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_1\}$

และจาก $w_{12} + w_{31} - w_{32} = -1$ เป็นค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

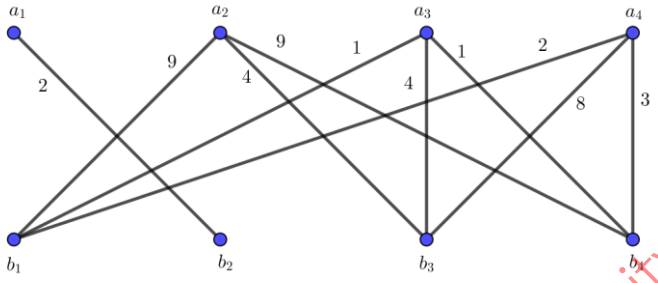
ดังนั้นจะได้ไซเคิล C_1 จะเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{4,4}$ ที่บรรจุเส้น e_{11} ที่มี $w(C_1) = 28$ กำหนดให้เป็น $(*)$ ดังภาพ



ภาพที่ 14 แฮมิลโทเนียนไซเคิล C_1 ที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{4,4}$ ที่บรรจุเส้น e_{11}

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

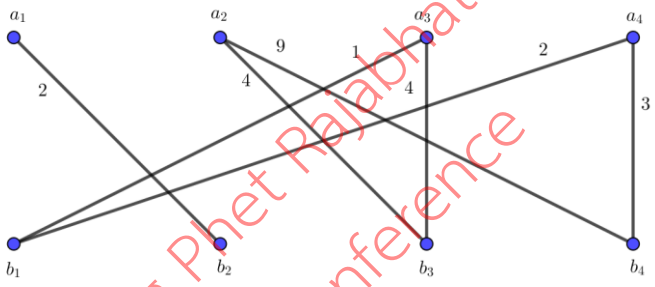
(2) สำหรับ $k = 2$ จะได้เส้น e_{12} และกราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_2\}$ ดังภาพ



ภาพที่ 15 กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_2\}$

พิจารณา $w_{2i} + w_{3j} + w_{4k}$ โดยที่ $i \neq j \neq k$

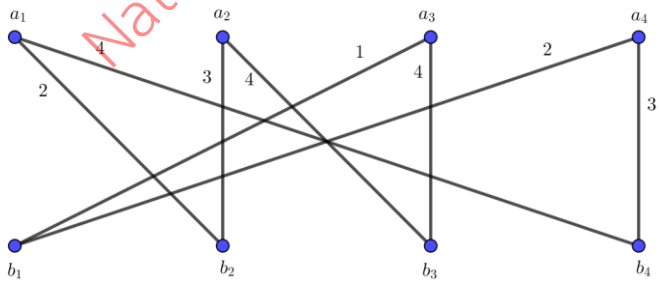
จาก $w_{21} + w_{34} + w_{43} = 18$ คือผลรวมน้ำหนักมากที่สุด จะได้แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีท-ไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_2\}$ ตามขั้นตอนวิธีการใน**ทฤษฎีบท 2.1** กับเส้น e_{12} ดังภาพ



ภาพที่ 16 แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_2\}$

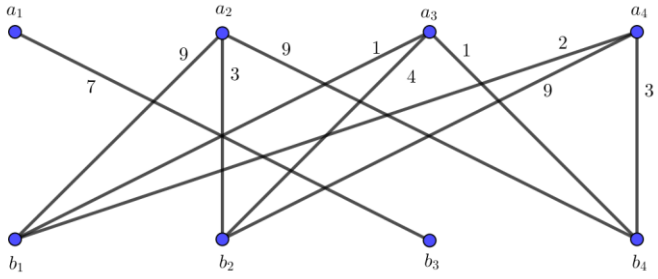
และจาก $w_{14} + w_{22} - w_{24} = -2$ เป็นค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

ดังนั้นจะได้ไซเคิล C_2 จะเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{4,4}$ ที่บรรจุเส้น e_{12} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{11} ที่มี $w(C_2) = 23$ กำหนดให้เป็น $(**)$ ดังภาพ



ภาพที่ 17 แฮมิลโทเนียนไซเคิล C_2 ที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{4,4}$ ที่บรรจุเส้น e_{12} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{11}

(3) สำหรับ $k = 3$ จะได้เส้น e_{13} และกราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_3\}$ ดังภาพ

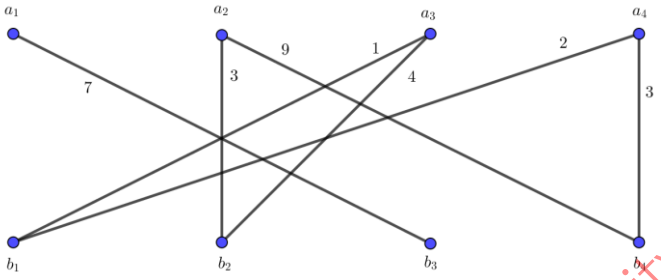


ภาพที่ 18 กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_3\}$

พิจารณา $w_{2i} + w_{3j} + w_{4k}$ โดยที่ $i \neq j \neq k$

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติ ครั้งที่ 5
สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

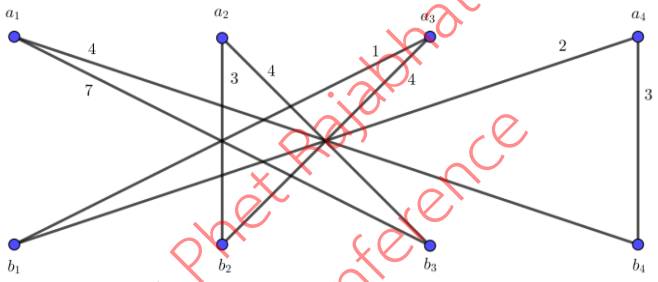
จาก $w_{21} + w_{34} + w_{42} = 19$ คือผลรวมน้ำหนักมากที่สุด จะได้แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีท-ไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_3\}$ ตามขั้นตอนวิธีการใน**ทฤษฎีบท 2.1** กับเส้น e_{13} ดังภาพ



ภาพที่ 19 แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4} - \{a_1, b_3\}$

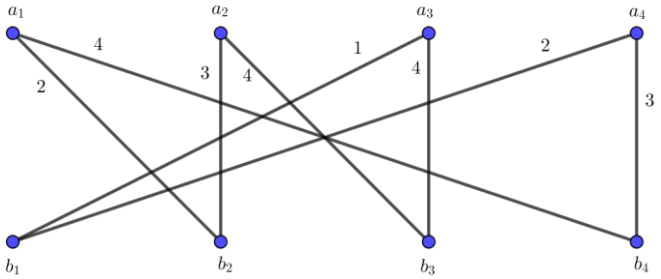
และจาก $w_{14} + w_{23} - w_{24} = -1$ เป็นค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

ดังนั้นจะได้ไซเคิล C_3 จะเป็นแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{4,4}$ ที่บรรจุเส้น e_{13} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{11} และ e_{12} ที่มี $w(C_3) = 28$ กำหนดให้เป็น $(***)$ ดังภาพ



ภาพที่ 20 แฮมิลโทเนียนไซเคิล C_3 ที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{4,4}$ ที่บรรจุเส้น e_{13} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{11} และ e_{12}

เพราะฉะนั้น โดย $(*), (**)$ และ $(***)$ จะได้ว่าแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{4,4}$ คือไซเคิล C_2 ซึ่งมีน้ำหนักคือ 23 ดัง**ภาพที่ 21**



ภาพที่ 21 แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{4,4}$

4. บทสรุป

ในบทความนี้ได้แสดงขั้นตอนวิธีสำหรับการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ ซึ่งนอกจากขั้นตอนวิธีดังกล่าว ยังประกอบด้วยองค์ความรู้ต่าง ๆ ที่สำคัญ ต่อไปนี้

1. จำนวนแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่แตกต่างกันของกราฟ $K_{n,n}$ จะมีทั้งหมด $\frac{n!(n-1)!}{2}$ ไซเคิล

2. ให้ $e_{1i}, e_{2j}, e_{3k} \in E(K_{3,3})$ โดยที่ $i \neq j \neq k$
ถ้า $w_{1i} + w_{2j} + w_{3k} = \max\{w_{1i} + w_{2j} + w_{3k} | i \neq j \neq k\}$ แล้ว $K_{3,3} - \{e_{1i}, e_{2j}, e_{3k}\}$ จะเป็นแฮ-มิลโทเนียนไซเคิลที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดบน $K_{3,3}$

3. สำหรับคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ ที่ประกอบด้วยพาร์ไทต์เซต $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ จะกำหนดสัญลักษณ์ของเส้น $a_i b_j \in E(K_{n,n})$ ด้วย e_{ij} และมีน้ำหนักคือ $w(e_{ij}) = w_{ij}$ จะได้ว่าขั้นตอนวิธีต่อไปนี้ จะทำให้ได้แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ

สำหรับแต่ละ $k = 1,2,3$ จะได้

3.1 หาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{3,3} = K_{4,4} - \{a_1, b_k\}$ ที่ได้ตามขั้นตอนวิธีการใน**ทฤษฎีบท 2.1**

3.2 หาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ ที่บรรจุเส้น e_{1k} แต่ไม่บรรจุเส้น e_{1i} เมื่อ $i < k$ ตามขั้นตอนวิธีการใน**ทฤษฎีบท 2.2** และ **บทแทรก 2.2**

3.3 เมื่อดำเนินการครบทุกค่าของ $k = 1,2,3$ จะได้แฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์-ไทต์กราฟ $K_{4,4}$ คือแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดในข้อ 2

ซึ่งจากผลการศึกษาข้างต้น ผู้อ่านสามารถใช้เป็นแนวทางสำหรับการหาขั้นตอนวิธีการหาแฮมิลโทเนียนไซเคิลที่น้อยที่สุดบนคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟตั้งแต่ $K_{5,5}$ ขึ้นไปได้

เอกสารอ้างอิง

นิรุตติ์ พิพรรธนจินดา. (2560). **ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.** กำแพงเพชร: มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร.

Ray, S. S. (2013). **Graph Theory with Algorithms and its Applications**. Rourkela: Springer India.

Wilson, R. J. (1998). **Introduction to Graph Theory** (4th ed.). Edinburgh Gate, Harlow: Addison Wesley Longman Limited.